

1917.

No. 11.

ANNALEN DER P H Y S I K.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. U. E. WIEDEMANN, P. DRUDE.

VIERTE FOLGE.

Band 53. Heft 11.

DER GANZEN REIHE 358. BANDES 3. HEFT.

KURATORIUM:

M. PLANCK, G. QUINCKE,
W. C. RÖNTGEN, W. VOIGT, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK.

MIT ZWEI TAFELN.



LEIPZIG, 1917.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIIUS BARTH.

DÖRRSTRASSE 16.

Bestellungen auf die „Annalen“ werden von allen Buchhandlungen, von den Postämtern und von der Verlagsbuchhandlung angenommen. Preis für den in 24 Heften (= 3 Bänden) ausgegebenen Jahrgang 54 M. (Ausgegeben am 27. November 1917.)



Inhalt.

	Seite
1. Reinhold Fürth. Einige Untersuchungen über Brownsche Bewegung an einem Einzelteilchen	177
2. M. von Laue. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Gravitation. Bemerkungen zur gleichnamigen Abhandlung von P. Gerber	214
3. Max Toepler. Über den inneren Aufbau von Gleitbüscheln und die Gesetze ihrer Leuchtfäden. (Hierzu Tafel I und II).	217
4. H. Dember und M. Uibe. Drei optisch-meteorologische Beobachtungen	235
5. G. Borelius. Bemerkung zu einer Arbeit von Adolf Böhi über ein Verfahren zur Messung der absoluten Potentialdifferenzen, welche beim Kontakt beliebiger Leiter auftreten	239
6. Max Planck. Zur Theorie des Rotationsspektrums. (Zweite Mitteilung.)	241

Die Redaktion der Annalen wird von den umseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr **Geh. Hofrat Prof. W. Wien** übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: **Würzburg, Plecherring 8.**

Es wird gebeten, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger **Abdruck** der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzeichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Zitate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.



Br

(A

sche
teile
eine
beh
keit
ung
Sch
Wei
stin
voll
Teil
mod
nüt
Lo
sche
oba

fest
Flü
der
der
wer
ist

Zeit
Cra

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 53.

1. *Einige Untersuchungen über Brownsche Bewegung an einem Einzelteilchen; von Reinhold Fürth.*

(Aus dem physikalischen Institut der deutschen Universität Prag.)

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich damit, einige Erscheinungen der Brownschen Bewegung an einem Einzelteilchen theoretisch näher zu untersuchen und die Ergebnisse einer experimentellen Kontrolle zu unterziehen. Der 1. Teil behandelt die Brownsche Bewegung eines in einer Flüssigkeit suspendierten Teilchens, das sich nach allen Richtungen ungehindert bewegen kann, sowohl unter dem Einfluß der Schwere als ohne ihn, in einer von der üblichen abweichenden Weise durch Beobachtung der zur Zurücklegung einer bestimmten Verschiebung notwendigen Zeit. Der zweite Teil soll sich mit der Frage befassen, inwiefern die Bewegung des Teilchens durch eine in der Nähe befindliche feste Wand modifiziert wird, und wie man die letztere Erscheinung benutzen kann, um einerseits eine absolute Bestimmung der Loschmidtschen Zahl durchzuführen, andererseits die Erscheinungen bei Konzentrationsschwankungen auf die Beobachtungen an einem solchen Einzelteilchen zu übertragen.

I. Teil.

A. Theorie.

Wir betrachten ein in einer Flüssigkeit suspendiertes festes Teilchen, das durch die unregelmäßigen Stöße der Flüssigkeitsmoleküle einerseits, durch die konstante Wirkung der Schwere andererseits, in eine Bewegung versetzt wird, von der hier einige Eigentümlichkeiten näher auseinandergesetzt werden sollen. Das Prinzip dessen ich mich bedienen will, ist bereits an anderem Orte von M. v. Smoluchowski¹⁾

1) M. v. Smoluchowski, Wiener Ber. 124. p. 263. 1915; Phys. Zeitachr. 16. p. 319. 1915; Ann. d. Phys. 48. p. 1103. 1915; Bull. Acad. Cracovie p. 418. 1913.

angewandt worden. Anstatt nämlich die Zeitgesamtheit zu betrachten, welche die sukzessiven Lagen des Teilchens bei systematischer Beobachtung bilden, kann man eine virtuelle Gesamtheit konstruieren, so daß die relativen Häufigkeiten jeder einzelnen Lage in dieser Gesamtheit denselben Wert haben, als die relativen Verweilzeiten in den entsprechenden Lagen bei unserer Zeitgesamtheit, wie das in der statistischen Mechanik häufig gemacht wird.

Wir behandeln das Problem als nur von einer Koordinate x abhängig. Die Lage des Teilchens zur Zeit $t = 0$ sei x_0 . Dann denke man sich statt dieses einen Systems eine große Anzahl analoger Systeme von gleich beschaffenen Teilchen, die sich alle zur Zeit $t = 0$ in der unendlich dünnen Schicht zwischen x_0 und $x_0 + dx$ aufhalten sollen. Die Wahrscheinlichkeit einer gewissen Lage $x_0 \dots x_0 + dx$ unseres Teilchens zur Zeit t ist dann gegeben durch diejenige Anzahl der Teilchen der virtuellen Gesamtheit, die sich zur Zeit t im Koordinatenbereiche $x_0 \dots x_0 + dx$ aufhalten. D. h. ich kann diese Wahrscheinlichkeit finden, indem ich die Methoden der Diffusionstheorie auf diese Gesamtheit anwende. Der Einfluß der Schwere äußert sich dabei offenbar darin, daß sich über diese Diffusion noch ein Niedersinken mit konstanter Geschwindigkeit superponiert. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist dann gegeben durch das über die Quellen erstreckte Integral der Diffusionsgleichung (oder Wärmeleitungsgleichung) mit Berücksichtigung einer Konvektion

$$(1) \quad \frac{\partial w}{\partial t} = D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + c \frac{\partial w}{\partial x},$$

wobei D den Diffusionskoeffizienten, c die konstante Fallgeschwindigkeit durch die Schwere bedeutet. Obzwar die folgenden Entwicklungen bereits zum Teil von Smoluchowski (l. c.) angestellt wurden, will ich doch der Vollständigkeit halber auch diese hier kurz referieren.

Zunächst kann man die Lösung der Differentialgleichung (1) reduzieren auf die Lösung der Gleichung

$$(2) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

wenn

$$(3) \quad w = u e^{-\frac{c}{2D}(x-x_0) - \frac{c^2 t}{4D}}$$

gesetzt wird.

Um zunächst die Einstein-Smoluchowskische Formel für das mittlere Verschiebungsquadrat aus (1) abzuleiten, braucht man die Lösung der Diffusionsgleichung für den Fall eines unendlich ausgedehnten homogenen Mediums bei gegebener Anfangsverteilung. Diese ist aus der Theorie der Wärmeleitung bekannt und lautet

$$u = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\alpha) e^{-\frac{(\alpha-x)^2}{4Dt}} d\alpha,$$

wobei $\Phi(\alpha)$ den gegebenen Anfangszustand bedeutet.

Laut unseren Voraussetzungen soll $\Phi(\alpha) d\alpha$ überall gleich Null sein, und für $\alpha = x_0$ gleich Eins. Dann wird

$$u = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4Dt}}.$$

Es sei zunächst $c = 0$, dann ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit einer Verschiebung $x - x_0$ in der Zeit t gegeben durch

$$(4) \quad w(x, t) dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4Dt}} dx$$

und das mittlere Verschiebungsquadrat

$$(5) \quad \overline{(x - x_0)^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} w(x, t) (x - x_0)^2 dx = 2Dt$$

zwei auf anderem Wege bereits oftmals hergeleitete Formeln.

Für $c \neq 0$ lautet die Lösung gemäß (3)

$$(4^*) \quad w^*(x, t) dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} e^{-\frac{(x-x_0+ct)^2}{4Dt}} dx$$

die mit (4) übereinstimmend wird, wenn man die Koordinatentransformation

$$x^* = x + ct$$

ausführt, d. h. wenn man die Verschiebungen in einem Koordinatensystem mißt, das sich mit der Geschwindigkeit c von oben nach unten bewegt.

Für Formel (5) tritt die analoge Formel ein

$$(5^*) \quad \overline{(x^* - x_0)^2} = 2Dt.$$

Wir wollen nun eine andere Wahrscheinlichkeitsbetrachtung an unserem Teilchen anstellen, die unabhängig von-einander von Schrödinger und Smoluchowski¹⁾ zuerst vorgenommen wurde, im Zusammenhang mit der bekannten Weiss-Ehrenhaftschen Berechnungsmethode. Wir werden nämlich die Wahrscheinlichkeit berechnen, daß ein Teilchen, das sich zur Zeit $t = 0$ im Punkte $x = b$ befand, die Ebene $x = 0$ zwischen t und $t + dt$ zum erstenmal überschreitet. Dem Umstande, daß das Teilchen in dem Momente von der Betrachtung ausscheidet, wo es die Marke $x = 0$ zum erstenmal überschreitet, wird Rechnung getragen, indem man als Randbedingung für $x = 0$ für alle Zeiten die Konzentration Null vorschreibt.

Das Quellenintegral der Differentialgleichung (2) unter dieser Randbedingung lautet, wie aus der Wärmeleitungstheorie bekannt ist,

$$u = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} \int_0^\infty \Phi(\alpha) \left(e^{-\frac{(\alpha-x)^2}{4Dt}} - e^{-\frac{(\alpha+x)^2}{4Dt}} \right) d\alpha,$$

oder unter unseren Voraussetzungen über $\Phi(\alpha)$

$$u = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} \left(e^{-\frac{(x-b)^2}{4Dt}} - e^{-\frac{(x+b)^2}{4Dt}} \right).$$

Die pro Zeiteinheit durch die Ebene $x = 0$ hindurchtretende Teilchenzahl bei der virtuellen Gesamtheit ist dann gegeben durch

$$D \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=0},$$

welche Größe also gleichzeitig die gesuchte Wahrscheinlichkeit der Erstpassage liefert.

Die Berechnung ergibt

$$(6) \quad M(t) dt = \frac{b}{2\sqrt{\pi Dt^3}} e^{-\frac{b^2}{4Dt}} dt.$$

Bezieht man noch den Einfluß der Schwere in die Rechnung ein, so muß man nach (3) die Konzentration in der Form ansetzen

1) E. Schrödinger, Phys. Zeitschr. 16, p. 289. 1915; M. v. Smoluchowski, Phys. Zeitschr. 16, p. 319. 1915; siehe auch D. Konstantinowsky, Phys. Zeitschr. 16, p. 369. 1915.

$$w = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4D}} - \frac{e^{-(x-b)^2}}{2D} \left(e^{-\frac{(x-b)^2}{4Dt}} - e^{-\frac{(x+b)^2}{4Dt}} \right),$$

woraus sich die analoge Wahrscheinlichkeit zu

$$(6^*) \quad M^*(t) dt = D \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=0} = \frac{b}{2\sqrt{\pi Dt^3}} e^{-\frac{(b-c)^2}{4Dt}} dt$$

berechnet.

Diese Formel kann man nun benutzen, um einige zeitliche Mittelwerte zu bestimmen. *Mittlere einseitige Erstpassagezeit* wollen wir die mittlere Zeit nennen, die das Teilchen braucht, um eine in der Entfernung b senkrecht unter dem Ausgangspunkt angebrachte Marke zum erstenmal zu passieren. Sie ergibt sich

$$(7a) \quad \bar{t} = \int_0^\infty t M^*(t) dt = \frac{b}{c},$$

während die analoge Größe

$$(7b) \quad \left(\frac{\bar{t}}{t} \right) = \int_0^\infty \frac{1}{t} M^*(t) dt = \frac{2D}{b^2} + \frac{c}{b}$$

ergibt.

Durch Kombination von (7a) und (7b) ergibt sich die zum ersten Male von E. Weiss¹⁾ in etwas anderer Gestalt angewandte Formel zur Bestimmung des Diffusionskoeffizienten aus den Abweichungen von der gleichförmigen Fallbewegung

$$(7c) \quad 2D = b^2 \left\{ \left(\frac{\bar{t}}{t} \right) - \frac{1}{t} \right\}.$$

Ist speziell wieder $c = 0$, so wird, wie man sieht,

$$(7d) \quad \left(\frac{\bar{t}}{t} \right) = \frac{2D}{b^2} \quad \text{und} \quad \bar{t} = \infty.$$

Da also in diesem Falle (7a) sinnlos wird, kann man versuchen, das analoge Mittel für eine endliche Beobachtungsdauer T zu bilden, d. h., man bilde das Mittel aller einseitigen Erstpassagezeiten, die kleiner sind als eine gegebene Zahl T .

Die Berechnung ergibt für diese Größe

$$(8) \quad \bar{t}_T = \frac{\int_0^T t M(t) dt}{\int_0^T M(t) dt} = \frac{b}{\sqrt{\pi D}} \frac{e^{-\frac{b^2}{4DT}}}{1 - \Phi\left(\frac{b}{2\sqrt{DT}}\right)} - \frac{b^2}{2D},$$

1) E. Weiss, Wiener Ber. 120. (2a) p. 1021. 1911.

wovon man sich durch partielle Integration leicht überzeugt. Dabei bedeutet $\Phi(y)$ das mit $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$ multiplizierte Gauss'sche Fehlerintegral

$$\Phi(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-x^2} dx.$$

Für große T vereinfacht sich die Formel durch Vernachlässigung kleiner Größen zu

$$(8) \quad i_T = \frac{b}{\sqrt{\pi D}} \sqrt{T - \frac{b^2}{2D}}.$$

Betrachten wir nun folgende Wahrscheinlichkeit: Das Teilchen gehe wieder zur Zeit $t=0$ vom Punkte $x=b$ aus. Wir wollen die Wahrscheinlichkeit bestimmen, daß das Teilchen im Zeitintervall $t \dots t + dt$ die Ebene $x=0$ oder $x=2b$ zum ersten Male überschreite. Dabei sei $c=0$ angenommen. Zur analogen Ableitung aus der Diffusionsgleichung (2) braucht man ihr Quellenintegral unter der Bedingung, daß in $x=0$ und in $x=2b$ ständig die Konzentration $u=0$ herrschen soll. Die Lösung bietet die Behandlung des Problems der Temperaturverteilung als Funktion von Ort und Zeit in einer Platte von unendlicher Breite und der Dicke $2b$, an deren Endflächen ständig die Temperatur Null herrscht.

Sie lautet¹⁾:

$$u = \frac{1}{b} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-D \left(\frac{n\pi}{2b}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi x}{2b} \int_0^{2b} f(\alpha) \sin \frac{n\pi \alpha}{2b} d\alpha =$$

$$\frac{1}{b} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-D \left(\frac{n\pi}{2b}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi x}{2b} \sin \frac{n\pi}{2}.$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist die Anzahl der pro Zeiteinheit aus den beiden Grenzebenen diffundierenden Teilchen

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} N(t) dt &= D \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=0} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=2b} \right\} dt = \\ &= \frac{\pi D}{b^2} \sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{n\pi}{2} e^{-D \left(\frac{n\pi}{2b}\right)^2 t} dt. \end{aligned} \right.$$

1) Riemann-Weber, Partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik, 4. Aufl. 2. p. 112.

Durch Ausrechnung kann man leicht kontrollieren, daß die ermittelte Wahrscheinlichkeit tatsächlich der Bedingung genügt:

$$\int_0^{\infty} N(t) dt = 1.$$

Formel (9) kann man benützen, um die *mittlere doppel-seitige Erstoppassagezeit*, also jene Zeit zu bestimmen, die das Teilchen im Mittel braucht, um eine *oder* die andere von zwei im Abstände b vom Ausgangspunkte rechts und links angebrachten Marken zum ersten Male zu überschreiten.

Es ergibt sich

$$(10) \quad \vartheta = \int_0^{\infty} t N(t) dt = \frac{b^2}{2D},$$

woraus für die Bestimmung von D folgt:

$$(10') \quad 2D = \frac{b^2}{\vartheta}.$$

Zum Schlusse dieses Kapitels wollen wir noch die Wahrscheinlichkeit einer *Wiederkehr* des Teilchens im nachstehenden Sinne behandeln:

Wir fragen nach der Größe der Wahrscheinlichkeit, daß das Teilchen unter dem Einflusse der Brownschen Bewegung allein, von seinem Ausgangspunkte zur Zeit $t = 0$ ausgehend, in dem Zeitelement $t \dots t + dt$ wieder dahin zurückkehrt, nachdem es sich nach irgendeiner Seite *mindestens* um die Strecke b vom Ausgangspunkte entfernt hatte.

Da es uns auch hier wieder nur auf die mittlere Wiederkehrzeit ankommt, können wir uns die Berechnung der Wahrscheinlichkeit ersparen, wenn wir bedenken, daß diese mittlere Wiederkehrzeit offenbar gleich sein muß der Zeit, die das Teilchen im Mittel braucht, um vom Ausgangspunkte eine der beiden Marken b , gleichgültig welche, zu erreichen, vermehrt um die im Mittel benötigte Zeit, um sich von da nach einer *bestimmten* Richtung, nämlich in der entgegengesetzten, um die Strecke b zum ersten Male zu entfernen. Es ist also diese Wiederkehrzeit gegeben durch

$$\tau = \vartheta + l_{T-\vartheta},$$

wenn wieder T die maximale Beobachtungsdauer bezeichnet. Auch hier haben wir $c = 0$ gesetzt. Für unbeschränkte Be-

beobachtungsdauer wächst τ über alle Grenzen. Für endliche Beobachtungsdauer erhalten wir

$$(11) \quad \tau_T = \frac{b}{\sqrt{\pi D}} \frac{1}{1 - \Phi\left(\frac{b}{2\sqrt{D\left(T - \frac{b^2}{2D}\right)}}\right)} \sqrt{T - \frac{b^2}{2D}},$$

was für große Beobachtungszeiten T durch Vernachlässigung kleiner Größen übergeht in

$$(11') \quad \tau_T = \frac{b}{\sqrt{\pi D}} \sqrt{T}.$$

Damit wollen wir die Betrachtungen dieses Kapitels schließen und in dem nächsten die experimentelle Verifikation der aufgestellten Formeln vornehmen.

B. Die Versuchsanordnung.

Um die in A. aufgestellten Formeln einer experimentellen Kontrolle zu unterziehen, wurde folgende Versuchsanordnung getroffen:

Die untersuchte Suspension bestand entweder aus einer nach Perrin¹⁾ durch Lösung von Gummigutt in Alkohol und nachherige Ausfällung durch starken Wasserüberschuß hergestellten Gummiguttemulsion (oder ähnlichen Mastixemulsion), oder einer durch Zerstäubung von Quecksilber im elektrischen Gleichstromlichtbogen unter Wasser hergestellten Quecksilberemulsion nach der Bredig-Ehrenhaftschen Methode.²⁾ Die Emulsion wurde in eine unter dem Namen „Objektnetzmikrometer“ bekannte Zeissche Kuvette zur Zählung von Blutkörperchen gebracht, mit einem Deckglas abgeschlossen und die Ränder mit Paraffin überstrichen. Dann wurde die Kuvette auf dem Tisch eines horizontal gestellten Merkschen Mikroskops mittels der Befestigungsvorrichtung angebracht. Zur Beobachtung diente das Objektiv 6 und das Okular 4 dieses Instrumentes bei völlig ausgezogenem Tubus. Dieses

1) J. Perrin, Die Brownsche Bewegung und die wahre Existenz der Moleküle, Dresden 1910; Die Atome. Leipzig und Berlin 1914.

2) G. Bredig, „Anorganische Fermente“; F. Ehrenhaft, Akad. Anzeiger Nr. XXV, 1908; siehe auch R. v. Ettenreich, Wiener Ber. (IIa) 121.

optische System hatte eine Vergrößerung von 430 lin. und eine $n. A. = 0,74$. In dem Huygenschen Okular befand sich ein Okularraster mit einer quadratischen Teilung in 60·60 Elemente. Durch Vergleich mit einem Zeisschen Objektmikrometer war die Distanz zweier benachbarter Linien des Rasters zu $19,2 \cdot 10^{-5}$ cm festgestellt worden. Bei den im nächsten Kapitel folgenden Meßergebnissen ist aber, wenn nichts ausdrücklich vermerkt ist, diese Größe als Einheit angenommen. Als Lichtquelle diente eine vor dem Mikroskop aufgestellte 32kerzige Metallfadenlampe, deren Licht vor dem Passieren der Emulsion noch ein Wasserfilter durchsetzte. Die ganze Anordnung war auf einem Fundamentpfeiler erschütterungsfrei aufgestellt.

Zur Registrierung des Durchganges eines Teilchens durch einen Teilstrich des Rasters diente der von Weiss bei der Ehrenhaftschen Versuchsanordnung verwendete elektromagnetische Doppelstiftschreiber, der in der im vorigen Kapitel zitierten Arbeit von E. Weiss erwähnt ist. Durch ein Metronom mit Quecksilberkontakt wurde der eine Hebel des Schreibers in Intervallen von 1 Sek. betätigt, der andere durch einen im Bereiche des Beobachters befindlichen Morsetaster. Wenn es nötig war, die Richtung des Durchganges des Teilchens durch einen Teilstrich ebenfalls zu markieren, wurde so verfahren, daß die Passage nach einer Seite durch einen einfachen Punkt, die nach der anderen Seite durch einen Doppelpunkt auf dem Morsestreifen markiert wurde.

Durch Beobachtung der Durchgänge durch die Vertikalstriche des Rasters bekommt man die Analyse der Brownschen Bewegung in der Horizontalen, das ist also *ohne* Einfluß der Schwere, durch die des Durchganges durch die Horizontalstriche die Analyse der Bewegung in der Vertikalen, also unter dem Einflusse der Schwerkraft. Da bei der verwendeten Vergrößerung die Teilchen nicht als Punkte erscheinen, muß man bei Anstellung der Beobachtungen ein für allemal vereinbaren, einen bestimmten Rand des Teilchens bei seinem Durchgange durch die Teilstriche zu markieren.¹⁾

1) Die verwendeten Apparate gehören dem physikalischen Institut der deutschen Universität in Prag an, woselbst auch die Versuche ausgeführt wurden, mit Ausnahme des Objektnetzmikrometers, das mir vom Institut für theoretische Physik an derselben Universität zur Verfügung gestellt wurde.

C. Die Beobachtungen.

Wie man aus dem vorigen Kapitel ersehen haben wird, ist meine Versuchsanordnung dahin eingerichtet worden, nicht, wie es bei Beobachtungen über Brownsche Bewegung üblich ist, die Lage des Teilchens in äquidistanten Zeitpunkten festzustellen, sondern die Zeiten zu messen, die die Partikel braucht, um die Entfernung zwischen gegebenen Marken zu durchlaufen. Ich habe diese Beobachtungsmethode gewählt, weil sie erstens experimentell viel leichter zu realisieren ist als die übliche, die, um genaue Resultate zu liefern, der Methoden der Kinematographie und Mikrophotographie bedarf, zweitens aber, weil die auf Grundlage dieser Beobachtungsmethode theoretisch zu erwartenden Wahrscheinlichkeitsergebnisse einer ausreichenden experimentellen Kontrolle noch nicht unterzogen worden sind.¹⁾

I.

Um zunächst eine Kontrolle der Formeln ohne Einfluß der Schwere zu erhalten, wurden Beobachtungen an Mastixemulsionen in der Horizontalen auf die beschriebene Weise

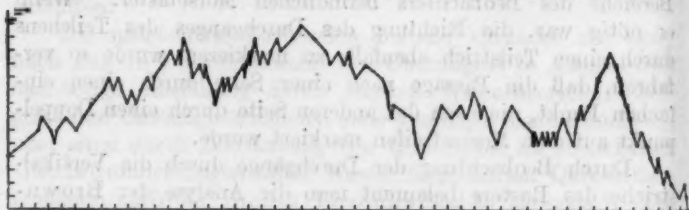


Fig. 1.

angestellt. Um die erhaltene Beobachtungsreihe bequem diskutieren zu können, habe ich sie von dem Morsestreifen auf eine graphische Darstellung übertragen, in welcher die Ordinaten die (ganzzahligen) Verschiebungen der Teilchen, die Abszissen die beobachteten Zeiten bedeuten. Fig. 1 stellt

1) Die Formeln (4) und (5) bzw. (4*) und (5*) wurden unter anderem geprüft von: J. Perrin und seinen Schülern Dabrowski und Chaudesaignes, „Die Atome“, The Svedberg, „Die Existenz der Moleküle“; v. Ettenreich, l. c.; J. Nordlund, *Zeitschr. f. physik. Chem.* 87. p. 40ff. 1914; K. Seelis, *Zeitschr. f. physik. Chem.* 86. p. 682ff. 1913; Zangger und Böhi, *Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich* 56. 1911.

die graphische Darstellung einer solchen Beobachtungsreihe über 518 Sek. dar. An dieser Reihe können wir nun eine große Anzahl der Betrachtungen des Abschnittes A. studieren. Wir wollen zunächst unsere Formel (7d) benutzen, um mit ihrer Hilfe den Wert des Diffusionskoeffizienten zu ermitteln, der uns dann dazu dienen soll, die übrigen Formeln zu verifizieren. Da bei der Brownschen Bewegung ohne Einwirkung äußerer Kräfte jede Lage gleich wahrscheinlich ist, können wir von jedem Punkt unserer Kurve als Ausgangspunkt ausgehen und gemäß den Bedingungen für die Formel (7d) jene Zeit ermitteln, die nötig ist, damit sich das Teilchen beispielsweise um b Teile nach links bewegt. Von allen diesen Werten bilden wir die reziproken und berechnen das Mittel. Dieselbe Prozedur haben wir für die Bewegung nach rechts anzustellen; aus beiden so erhaltenen Werten bilden wir wieder das Mittel. Die entstehende Größe ist unser gesuchtes $(1/t)$. Für jedes ganzzahlige b erhalten wir auf diese Weise das zugehörige $(1/t)$. Wegen der Beschränktheit der gesamten Beobachtungsreihe kann das Verfahren nicht auf zu große Werte von b ausgedehnt werden, wir begnügen uns im folgenden mit den Werten $b = 1, 2, 3$, an denen die Richtigkeit der Formel (7d) bereits zu ersehen ist. Nachstehende Tab. 1 enthält die zu den einzelnen b gehörigen Werte von $(1/t)$ und die Produkte $b^2(1/t)$, die nach der Formel konstant sein müssen; die Forderung ist mit genügender Genauigkeit erfüllt. Der halbe Mittelwert der genannten Produkte liefert das gesuchte D .

Tabelle 1.

b	$(\frac{1}{t})$	$b^2(\frac{1}{t})$	
1	0,228	0,228	$D = 0,116$
2	0,058	0,232	
3	0,026	0,233	

Mit dem Werte für $D = 0,116$ wollen wir nun Formel (8) für i_T verifizieren. Der Vorgang, den man hier zu verfolgen hat, ist analog dem vorher beschriebenen, nur daß man bei der Mittelbildung alle Werte $t > T$ wegzulassen hat. Für je drei Werte von T und b ist in Tab. 2 der aus den Beobachtungen ermittelte und der aus Formel (8) folgende Wert

von t nebeneinander gestellt. Auch hier ist die Übereinstimmung durchaus befriedigend.¹⁾

Tabelle 2.

T	b	\bar{t} (beob.)	\bar{t} (ber.)
50	1	9,95	10,03
	2	18,46	18,3
	3	29,57	24,1
100	1	15,42	15,1
	2	30,30	27,6
	3	41,08	37,8
150	1	19,42	18,8
	2	37,90	34,9
	3	54,57	48,3

Nun können wir leicht auch Formel (6) einer Kontrolle unterziehen, indem wir sie in der integrierten Form hinschreiben

$$(6a) \quad M_{t_1 t_2} = \int_{t_1}^{t_2} M(t) dt = \Phi\left(\frac{b}{2\sqrt{D t_1}}\right) - \Phi\left(\frac{b}{2\sqrt{D t_2}}\right),$$

wo Φ die auf p. 182 auseinandergesetzte Bedeutung hat. Wir teilen die Zeit t in gewisse Intervalle t_i und haben abzuzählen, wieviele beobachtete Zeiten unserer Statistik bei einem bestimmten b in die einzelnen Intervalle hineinfallen. In der nachstehenden Tab. 3 sind für $b = 1$ die auf diese Weise aus den Beobachtungen resultierenden und die aus Formel (6a) berechneten Häufigkeitszahlen n (beob.) und n (ber.) nebeneinandergestellt. Auch hier ist die Übereinstimmung wenigstens für die kleinen t -Werte eine befriedigende.²⁾

Tabelle 3.

$t_1 - t_2$	n (beob.)	n (ber.)	$t_1 - t_2$	n (beob.)	n (ber.)
0-10	152	144	50-100	20	18
10-20	36	37	100-200	22	13
20-30	13	17	200-300	7	7
30-50	19	18	300-500	1	2

1) Daß die theoretischen t -Werte gegen die experimentellen etwas zurückbleiben, läßt auf einen zu großen Wert von D schließen, doch habe ich mit Absicht den aus Formel (7d) folgenden Wert zugrunde gelegt, da dieser Formel eine größere experimentelle Zuverlässigkeit zukommt als Formel (8).

2) Für die großen t -Werte ist bessere Übereinstimmung nicht zu verlangen, da hier die Unsicherheit infolge der Beschränktheit der Beobachtungsreihe naturgemäß viel größer ist.

Wir gehen nun zur Bestimmung der mittleren doppel-seitigen Erstpassagezeit über, wie sie sich aus derselben Beobachtungsreihe ergibt, die wir bis jetzt verwendet haben. Wir verfahren zu ihrer Bestimmung ebenso, nur daß wir jetzt von einem Punkte ausgehend immer diejenige Zeit aus Fig. 1 bestimmen müssen, die bis zum nächsten Durchgang durch den b ten Teilstrich rechts oder links vom Ausgangspunkte vergeht. Aus allen diesen Werten für ein bestimmtes b haben wir wieder das Mittel zu nehmen, das unser ϑ der Formel (10) darstellt. Nachstehende Tab. 4 enthält für einige Werte von b die zugehörigen ϑ und b^2/ϑ , welch letztere nach (10) konstant und zwar gleich $2D$ sein müssen.

Tabelle 4.

b	ϑ	$\frac{b^2}{\vartheta}$	
1	3,73	0,267	$D = 0,133$
2	15,09	0,265	
3	33,39	0,269	
4	59,17	0,269	
5	94,09	0,265	
6	138,57	0,259	

Der aus dieser Art der Beobachtung erschlossene Wert von D steht, wie man sieht, in verhältnismäßig guter Übereinstimmung mit dem früher gewonnenen.

Mit diesem Werte von D wollen wir nun auch noch Formel (9) für die relative Häufigkeit einer doppel-seitigen Erstpassagezeit mit den Beobachtungen vergleichen. Auch hier schreiben wir die Formel in der integrierten Form an:

$$(9a) \quad N_{t_1} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2} \left(e^{-D \left(\frac{n\pi}{2t} \right)^2 t_1} - e^{-D \left(\frac{n\pi}{2t} \right)^2 t_2} \right).$$

Wir gehen so vor wie bei Formel (6a), indem wir auch hier wieder $b = 1$ setzen, Tab. 5 enthält wieder für eine bestimmte Intervalleinteilung die beobachteten und berechneten Häufigkeitswerte nebeneinander. Auch hier kann man die Übereinstimmung beider konstatieren.

Tabelle 5.

$t_1 - t_2$	n (beob.)	n (ber.)
0-2	31	32
2-4	58	42
4-6	27	26
6-8	15	16
8-10	6	10
10-16	4	12

Zum Schlusse dieses Abschnittes wollen wir schließlich noch die Formel (11) für die mittlere Wiederkehrzeit einer Probe unterwerfen. Wir entnehmen unserer Kurve, von jedem Punkte als gleichwahrscheinlichen einzeln ausgehend, die Zeit, nach deren Ablauf die Kurve die gleiche Ordinate zum ersten Male wieder berührt. Infolge der Eigentümlichkeit der Beobachtungsmethode stellen diese Zeiten im Mittel direkt die von uns definierten Wiederkehrzeiten für $b = 1$ dar, da aufeinanderfolgende Durchgänge durch einen Vertikalstrich, ohne daß sich das Teilchen in der Zwischenzeit bis mindestens zum nächsten bewegt hätte, nicht notiert werden. Dabei ist die Mittelbildung wieder so vorzunehmen, daß alle Werte $\tau > T$ wegzulassen sind. Unsere Beobachtungsreihe ergibt für $T = 100$

$$\tau_{\text{beob.}} = 18,97 \text{ sec,}$$

während die Berechnung nach Formel (11)

$$\tau_{\text{ber.}} = 18,84 \text{ sec}$$

ergibt, die in ausreichendem Grade übereinstimmen.

II.

Um nun auch noch die in A. abgeleiteten Formeln für die Brownsche Bewegung in der Vertikalen, also unter dem Einflusse der Schwerkraft, einer Prüfung zu unterziehen, wurden ähnliche Beobachtungen in der in B. näher auseinander-gesetzten Weise auch in der Vertikalen an Gummigutt- und Quecksilberemulsionen angestellt. Von der großen Anzahl von Beobachtungsreihen soll hier eine einzige an Quecksilber angeführt und näher diskutiert werden, da eine noch unaufgeklärte Anomalie die weiter unten kurz gestreift werden wird, erst noch ihrer Aufklärung zugeführt werden soll, weswegen ich die Veröffentlichung dieser Reihen bis dahin auf-

schiebe. Die folgende Tabelle enthält die dem Telegraphenstreifen entnommenen Passagezeiten beim Durchgange durch die Horizontalstriche des Rasters. Um eine größere Anzahl von Beobachtungen zu erhalten, ließ ich das Teilchen zunächst über die ganze Strecke von 60 Teilen fallen, worauf das Objektmikrometer mittels der Objektstellschrauben des Mikroskops soweit gehoben wurde, bis dasselbe Teilchen wieder (im Mikroskop gesehen) am unteren Ende der Okularskala angelangt war, und darauf die Ablesung wiederholt. Die mitgeteilte Reihe enthält auf diese Weise 118 Beobachtungen, die auf 0,1 sec abgerundet sind.

Tabelle 6.

<i>t</i> :							
1,1	0,5	1,0	0,6	0,8	0,9	0,5	1,7
0,8	0,4	0,4	0,4	0,5	1,0	0,6	0,8
0,9	0,6	0,7	0,7	0,4	0,3	0,7	0,6
0,8	0,7	0,8	1,2	0,4	0,4	0,7	0,8
0,9	0,5	0,5	0,6	0,8	0,7	0,5	0,6
0,7	0,4	0,5	0,4	0,7	0,7	0,5	0,3
0,6	1,2	0,5	0,4	0,4	0,6	0,6	0,5
0,5	0,8	0,7	0,8	0,5	0,7	0,9	0,8
0,4	0,6	0,6	0,5	0,9	0,9	1,0	0,6
0,4	0,3	0,4	0,9	0,5	0,5	0,9	0,7
0,4	0,4	0,5	0,4	0,4	0,5	0,6	1,3
1,0	0,7	0,4	0,8	0,5	0,6	0,5	0,7
0,5	0,9	0,6	0,7	0,8	0,5	0,5	0,6
0,9	0,9	0,4	0,7	0,5	0,4	0,6	$\bar{t} = 0,656$
1,7	0,6	0,7	0,5	0,4	0,4	1,4	

Wir wollen diese Statistik zunächst benutzen, um die Richtigkeit der Relation (7c) zu prüfen und aus ihr den Wert des Diffusionskoeffizienten D und der mittleren Fallgeschwindigkeit c zu entnehmen.

Der Wert der letzteren ergibt sich zunächst durch Mittelbildung über alle t zu

$$c = \frac{1}{\bar{t}} = 1,5245 \text{ Teilstr./sec.}$$

Das Mittel der reziproken Fallzeiten liefert $(1/\bar{t})$ und damit das Mittel zur Bestimmung von $2D$ aus (7c).

Addiert man je zwei aufeinanderfolgende t -Werte, so erhält man die entsprechenden Fallzeiten für die doppelte Fallstrecke $b = 2$, analog für $b = 3, 4 \dots$. Man kann so für beliebige b , sofern sie klein sind, gegen die gesamte Fallstrecke

die entsprechenden Werte von \bar{t} und (\bar{t}/t) ausrechnen und in Formel (7c) einsetzen. Tab. 7 enthält für $b = 1$ bis $b = 9$ die Werte von (\bar{t}/t) und $1/\bar{t}$, sowie von

$$b^3 \left\{ \left(\frac{\bar{t}}{t} \right) - \frac{1}{\bar{t}} \right\},$$

welch letztere sich als Konstante ergeben soll. Die Forderung ist, wie man sieht, annäherungsweise erfüllt, doch dürfte zur Erreichung der gleichen Genauigkeit, als in der Horizontalen, jedenfalls eine weit größere Anzahl von Beobachtungen nötig sein, da die Stopfehler hier naturgemäß eine größere Rolle spielen als dort.

Tabelle 7.

b	$\left(\frac{\bar{t}}{t} \right)$	$\frac{1}{\bar{t}}$	$b^3 \left\{ \left(\frac{\bar{t}}{t} \right) - \frac{1}{\bar{t}} \right\}$
1	1,7295	1,5245	0,205
2	0,8259	0,7622	0,254
3	0,5382	0,5082	0,270
4	0,3940	0,3811	0,205
5	0,3151	0,3049	0,255
6	0,2611	0,2541	0,253
7	0,2225	0,2178	0,232
8	0,1944	0,1906	0,248
9	0,1725	0,1694	0,254

$D = 0,121$

Als Mittelwert ergibt sich daher der Wert des Diffusionskoeffizienten zu

$$D = 0,121,$$

gemessen aus den Abweichungen von der gleichförmigen Fallgeschwindigkeit.

Nach Schrödinger¹⁾ ist für längere Beobachtungsreihen der mittlere relative Fehler bei der Messung des Diffusionskoeffizienten auf diesem Wege nahezu $\sqrt{\frac{2}{n}}$, wenn n die Anzahl der Beobachtungen bedeutet. Das ergibt für unseren Fall 13 Proz., während sich aus Tab. 7 der mittlere relative Fehler der D zu 7,6 Proz. berechnet, also vollkommen innerhalb der zulässigen Genauigkeitsgrenze bleibt.

Mit den erlangten Werten von c und D wollen wir nun noch Formel (6*) über die Häufigkeit eines bestimmten Wertes

1) E. Schrödinger, l. c. p. 295.

der Fallzeit t kontrollieren. Tab. 8 enthält die nach (6*) berechneten Werte von $M^*(t)$, die man in diesem Falle wegen der Kleinheit der Zeitintervalle in der nicht integrierten Form anwenden kann, indem man $M^*(t)$ mit der Länge des Zeitintervalles multipliziert. Dieses ist infolge der Art der vorgenommenen Abrundung gleich 1 Sek. Tab. 8 enthält außerdem noch die aus diesen relativen Häufigkeiten folgenden absoluten unter n (ber.) und die wirklich beobachteten Häufigkeiten unter n (beob.). Man sieht, daß im ganzen und großen Übereinstimmung herrscht. Eine bessere ist infolge der bereits auseinandergesetzten Gründe nicht zu erwarten.

Tabelle 8.

t	$M^*(t)$	n (ber.)	n (beob.)
0,3	0,635	7	3
0,4	1,450	17	22
0,5	1,800	21	25
0,6	1,675	20	17
0,7	1,342	16	17
0,8	0,990	12	12
0,9	0,679	8	11
1,0	0,452	5	4
1,1	0,292	3	1
1,2	0,183	2	2
1,3	0,116	1	1
1,4	0,071	1	1
1,5	0,044	1	0

Fig. 2 enthält die graphische Darstellung der Tab. 8, indem die gezeichnete Kurve den theoretischen, die kleinen

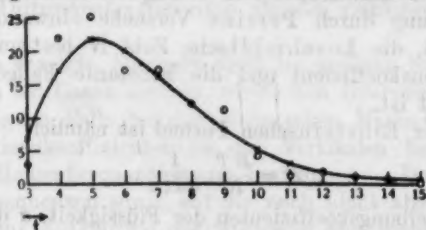


Fig. 2.

Kreise den beobachteten Häufigkeitswerten entsprechen. Aus der Darstellung ist wohl zu ersehen, daß die theoretische Kurve die Versuchsergebnisse wirklich ausgleicht.

Ich will nun noch kurz auf die am Eingang dieses Abschnittes erwähnte Anomalie eingehen. Ich habe an derselben Quecksilberpartikel, auf die sich die vorangehende Untersuchung bezog, auch Beobachtungen über die Brownsche Bewegung in der Horizontalen in der im vorigen Abschnitt näher erläuterten Weise angestellt und daraus nach Formel (10') über die mittlere doppelseitige Erstpassagezeit den Diffusionskoeffizienten in der Horizontalen bestimmt, der sich als wesentlich größer herausstellte. Während wir in der Vertikalen erhielten $D = 0,121$, ergibt sich für die Horizontale $D = 0,195$, was einem Unterschied von rund 60 Proz. gleichkommt. Und diese Anomalie zeigt sich tatsächlich bei allen 10 vorläufig von mir angestellten Beobachtungsreihen an Quecksilberemulsionen und zwar immer im gleichen Sinne, so daß hier eine systematische Ursache zugrunde liegen muß, die noch der Aufdeckung harret. Ich bemerke, daß in der bereits zitierten Arbeit Ettenreichs, der die Verschiebungen der Teilchen in äquidistanten Zeitpunkten mißt, ein gleicher Unterschied, und zwar im selben Sinne bei der größten Anzahl der angestellten Beobachtungen konstatiert wurde, was darauf schließen läßt, daß die Anomalie nicht etwa auf die besondere Art der von mir verwendeten Beobachtungsmethode zurückzuführen ist.

Da offenbar nur einer der beiden Werte des Diffusionskoeffizienten richtig sein kann, wäre nun zu entscheiden, welcher dies ist. Unter Annahme der Kugelgestalt der Tröpfchen, die aus dem mikroskopischen Bilde als sicher angenommen werden kann, läßt sich nun doch vermittels des Stokesschen Gesetzes, dessen Gültigkeit für Kugeln dieser Größenordnung durch Perrins Versuche einwandfrei nachgewiesen ist, die Loschmidtsche Zahl N bestimmen, wenn der Diffusionskoeffizient und die konstante Fallgeschwindigkeit bekannt ist.

Nach der Einsteinschen Formel ist nämlich

$$D = \frac{RT}{N} \frac{1}{6\pi\zeta a},$$

wo ζ den Reibungskoeffizienten der Flüssigkeit, a den Radius des kugelförmigen Teilchens bedeutet. Ferner ist

$$c = \frac{1}{6\pi\zeta a} \frac{4\pi}{3} a^3 (d - d_0) g = \frac{2}{9} \frac{d - d_0}{\zeta} g \cdot a^2,$$

wo d die Dichte des Teilchens, d_0 die der Flüssigkeit bedeutet.

Aus der letzteren Formel folgt

$$a = \sqrt{\frac{9\sigma\zeta}{2g(d-d_0)'}}$$

was in die erste eingesetzt

$$D = \frac{RT}{N} \frac{\sqrt{2g(d-d_0)}}{18\pi\sqrt{\zeta^3 c}}$$

ergibt, oder für N den Wert

$$(12) \quad N = \frac{RT}{D} \frac{1}{18\pi} \sqrt{\frac{2g(d-d_0)}{\zeta^3 \cdot c}}$$

Darin haben wir für unseren Fall zu setzen:

$$T = 293, \quad R = 8,315 \cdot 10^7, \quad g = 981, \quad d - d_0 = 12,6,$$

$$\zeta = 0,0102, \quad c = 1,524 \cdot 19,2 \cdot 10^{-5}$$

$$\text{und entweder} \quad D_v = 0,121 \cdot 19,2^2 \cdot 10^{-10},$$

$$\text{oder} \quad D_H = 0,195 \cdot 19,2^2 \cdot 10^{-10}.$$

Durch Ausrechnung ergibt sich im ersten Falle

$$\underline{N_v = 86 \cdot 10^{22}}$$

und im zweiten Falle

$$\underline{N_H = 53 \cdot 10^{22}},$$

von denen der zweite dem Planckschen Wert

$$N = 62 \cdot 10^{22}$$

näher liegt als der erste, so daß man mit einiger Berechtigung den aus der Beobachtung in der Horizontalen berechneten Wert des Diffusionskoeffizienten als den richtigen anzusehen haben wird.

Ob die gezeigte Anomalie auch bei anderen Suspensionen, namentlich bei Gasen auftritt, dürfte von Interesse sein, da ja in eben diesem Falle bei der Weiss'schen Methode der Wert des Diffusionskoeffizienten in der Vertikalen benutzt wird, um das Elementarquantum zu bestimmen. Doch soll auf diese Konsequenzen sowie auf die noch nicht abgeschlossenen Versuche zur Aufklärung der Anomalie hier nicht näher eingegangen werden, sollen vielmehr einer späteren Arbeit vorbehalten bleiben. Mit diesen Betrachtungen will ich nun den ersten Teil dieser Arbeit schließen und mich dem zweiten zuwenden.

II. Teil.

A. Versuchsanordnung und Beobachtungsmethode.

Gemäß dem am Anfange dieser Arbeit ausgesprochenen Plane soll dieser Teil sich mit der Brownschen Bewegung einer Partikel in der Nähe einer festen Wand beschäftigen. Im folgenden will ich zunächst die für die dazu nötigen Beobachtungen gebrauchte Versuchsanordnung und die Methode der Beobachtungen besprechen.

An der Aufstellung des Mikroskops wurde nichts geändert, als daß statt des Okularrasters ein bloß mit Horizontalstrichen versehenes Okularmikrometer verwendet wurde, das vorher durch Vergleichung mit einem Zeiss'schen Objektmikrometer geeicht worden war. Es ergab sich ein Teil des Okularmikrometers $= 1,135 \cdot 10^{-4}$ cm. Ferner wurde statt des Objektivs 6 das Objektiv 9 dieses Mikroskops verwendet, Okular 4 wurde beibehalten. Das derart geschaffene optische System hatte eine Vergrößerung von 980fach linear und eine N.A. $= 0,827$.

Statt des Objektnetzmikrometers mußte eine andere Kuvette verwendet werden, die gestattete, das Teilchen bei seiner Bewegung in der Nähe eines horizontalen Bodens zu verfolgen. Sie wurde folgendermaßen hergestellt. Eine 1 cm dicke rechteckige, geschliffene Glasplatte von 5×6 cm mit einem u-förmigen Ausschnitte von 2 cm Breite und 3,5 cm Länge, die von einer unbrauchbar gewordenen Kuvette stammte, wurde auf einer Seite durch eine Glasplatte, auf der anderen durch eine Hartgummiplatte abgeschlossen, die mit Pizein verkittet war. Die Hartgummiplatte war etwa in der Mitte des u-förmigen Ausschnittes mit einem kreisförmigen Loch von 12 mm Durchmesser versehen, das mit einem Deckgläschen von innen abgeschlossen war, und in das der Objektivkopf des Mikroskops bequem hineinpaßte. An dieses Fenster war von innen ein Glaswürfel von 12 mm Seitenlänge angekittet, dessen obere Kante das Fenster gerade halbierte. Auf die obere horizontale Fläche des Würfels wurde endlich ein ebenes Deckgläschen so aufgekittet, daß es sich an das Fenster mit seiner Schmalseite vollkommen anlegte. Dieses Deckglas bildete den horizontalen Boden, und die geschilderte Anordnung ermöglichte es, mit dem stark vergrößernden Objektiv so nahe heranzugehen, als es der kurze Frontabstand desselben erforderte. Bei Scharfeinstellung auf die

Vorderkante des Bodens erschien dieser trotz der starken Vergrößerung als vollkommen eben, was für die anzustellenden Messungen eine notwendige Vorbedingung ist.

Die Befestigung am Mikroskop geschah durch entsprechend konstruierte Klammern, so daß man durch Verdrehen der Stellschrauben des Tischchens noch die Möglichkeit hatte, den Boden genau horizontal zu stellen, und an eine beliebige Stelle des Gesichtsfeldes zu bringen. Die Einstellung wurde in der Weise vorgenommen, daß der als Horizontalstrich sichtbare Boden mit einem Teilstrich des Okularmikrometers übereinstimmte.

Nun wurde in die Kuvette eine Gummiguttemulsion gebracht und einige Stunden der Sedimentation überlassen. Nach dieser Zeit sah man, daß die am Boden abgesetzten Teilchen daselbst nicht in Ruhe waren, sondern wie Gummibälle lebhaft auf- und abtanzten, indem sie durch den Glasboden vollkommen elastisch reflektiert wurden. Es wurde nun ein geeignetes Teilchen aufgesucht und auf seinem (durch das Horizontalstehen des Bodens verbürgten) vertikalen Wege im Laufe der Zeit verfolgt, indem wieder die Durchgänge durch die Teilstriche des Okularmikrometers mit Hilfe des Doppelstiftschreibers markiert wurden, und zwar eine Überschreitung von unten nach oben (im Mikroskop gesehen umgekehrt) durch einen Punkt, eine solche von oben nach unten durch zwei Punkte und eine Berührung des Bodens durch drei Punkte, um eine Verwechslung beim nachherigen Auswerten des Telegraphenstreifens zu vermeiden.

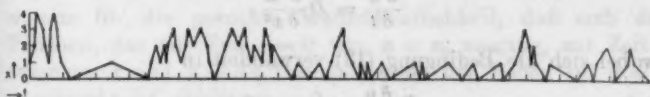


Fig. 8.

Zur bequemen Weiterverwertung der erhaltenen Resultate wurde der Inhalt des Streifens wieder graphisch dargestellt. Eine solche Darstellung zeigt für ein Gummigutteilchen Fig. 8, die der nachfolgenden Diskussion zugrunde gelegt ist. Als Ordinaten sind hier die Entfernungen vom Boden, in Teilen des Okularmikrometers gemessen, als Abszissen die entsprechenden Passagezeiten aufgetragen; die so erhaltenen Punkte sind zur Orientierung durch gerade Linien verbunden,

die aber keineswegs die Bahn des Teilchens während dieser Zeit bedeuten sollen.

In den später vorkommenden Berechnungen ist immer, wenn nichts ausdrücklich vermerkt ist, als Längeneinheit ein Teil des Okularmikrometers zugrunde gelegt.

B. Sedimentation.

Wir wollen nun zunächst theoretisch untersuchen, wie die Brownsche Bewegung des Teilchens durch Anbringung des Bodens geändert wird. Die betreffende Betrachtung ist von M. v. Smoluchowski¹⁾ bereits angestellt worden; sie soll hier kurz der Vollständigkeit halber wiederholt und durch eine ähnliche Überlegung ergänzt werden.

Wir gehen wieder von der Diffusionsgleichung

$$(1) \quad \frac{\partial w}{\partial t} = D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + c \frac{\partial w}{\partial x}$$

aus, zu der aber nun noch die Zusatzbedingung hinzukommen muß, daß die gesamte Strömung der Substanz an der Stelle $x = 0$, wo wir uns den Boden angebracht denken wollen, verschwinden muß.

$$(13) \quad D \frac{\partial w}{\partial x} + cw = 0 \quad \text{für } x = 0.$$

Durch Einführung der Funktion (8) kann man die Lösung von (1) wieder reduzieren auf die von (2):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

wobei sich die Bedingung (13) verwandelt in

$$(14) \quad D \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{c}{2} u = 0.$$

Die Lösung von (2) unter der Randbedingung (14) ist identisch mit der aus der Theorie der Wärmeleitung bekannten Lösung der Aufgabe, wie sich die Temperatur im Innern eines nach einer Richtung unendlich ausgedehnten Körpers ändert, der nach der anderen Richtung durch die Ebene $x = 0$ begrenzt ist, längs derer er mit der Umgebung von der Tem-

1) M. v. Smoluchowski, Phys. Zeitschr. 17. p. 588ff. 1916.

peratur Null in Berührung steht. Die Anfangsverteilung sei gegeben. Diese Lösung lautet¹⁾

$$u = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} \int_0^\infty \left\{ \Phi(\alpha) e^{-\frac{(\alpha-x)^2}{4Dt}} + \Phi(-\alpha) e^{-\frac{(\alpha+x)^2}{4Dt}} \right\} d\alpha,$$

wo $\Phi(-\alpha)$ zu bestimmen ist aus der Gleichung

$$\Phi(-\alpha) = \Phi(\alpha) + \frac{c}{D} e^{\frac{c}{2D}\alpha} \int_0^\alpha \Phi(\xi) e^{-\frac{c}{2D}\xi} d\xi.$$

Über die Funktion $\Phi(\alpha)$ ist wieder die Voraussetzung zu machen, die bereits in Teil I, A ausgesprochen wurde.

Es ist daher

$$u = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} \left[e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4Dt}} + e^{-\frac{(x+x_0)^2}{4Dt}} \right] + \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} \cdot \frac{c}{D} \int_{x_0}^\infty e^{-\frac{(\alpha+x)^2}{4Dt} + \frac{c\alpha}{2D} - \frac{cx_0}{2D}} d\alpha$$

was nach einigen einfachen Umformungen übergeht in

$$u = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} \left[e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4Dt}} + e^{-\frac{(x+x_0)^2}{4Dt}} \right] + \frac{c}{D\sqrt{\pi}} e^{\frac{c^2 t}{4D} - \frac{xc}{2D} - \frac{x_0 c}{2D}} \int_{\frac{x+x_0-c}{2\sqrt{Dt}}}^\infty e^{-s^2} dz,$$

woraus für die gesuchte Wahrscheinlichkeit, daß sich das Teilchen, das zur Zeit $t=0$ von $x=x_0$ ausging, zur Zeit t zwischen x und $x+dx$ befindet, wenn der Boden bei $x=0$ angebracht ist, ergibt zu

$$(15) \left\{ \begin{aligned} w(x, x_0, t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} \left[e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4Dt}} + e^{-\frac{(x+x_0)^2}{4Dt}} \right] e^{-\frac{c}{2D}(x-x_0) - \frac{c^2 t}{4D}} \\ &+ \frac{c}{D\sqrt{\pi}} e^{-\frac{c^2 t}{4D} - \frac{xc}{2D} - \frac{x_0 c}{2D}} \int_{\frac{x+x_0-c}{2\sqrt{Dt}}}^\infty e^{-s^2} ds. \end{aligned} \right.$$

1) Riemann-Weber, Partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik, p. 96f, Braunschweig 1901.

Diese Formel geht für große t , d. h. wenn die Sedimentation eingetreten ist, in folgende über:

$$(16) \quad w(x) = \frac{c}{D} e^{-\frac{cx}{D}},$$

in der, wie man sieht, die Aussage über den Ausgangspunkt des Teilchens natürlicherweise nicht mehr enthalten ist. Gemäß den im vorigen Abschnitte erläuterten Versuchsbedingungen hat man auf die Resultate der Beobachtung in unserem Falle Formel (16) anzuwenden.

Die Formel ist übrigens identisch mit der Perrinschen Höhenverteilungsförmel, wenn für D der aus dem Gleichverteilungssatz folgende Wert eingesetzt wird. Die Perrinsche Beobachtungsmethode der Höhenschichtung ist die Übertragung der hier für eine Zeitgesamtheit abgeleiteten Formel auf eine Raumgesamtheit. Die Idee, statt der großen Teilchenzahl bei Perrin, die Zeitgesamtheit der Lagen eines Teilchens zu untersuchen, ist ebenfalls zum ersten Male von Smoluchowski¹⁾ ausgesprochen worden, obzwar ich bemerken möchte, daß ich den Plan der Ausführung dieser Versuche gefaßt hatte, bevor ich von der erwähnten Abhandlung Smoluchowskis Kenntnis erhielt.

Aus Formel (16) ersieht man, daß w sein Maximum hat für $x = 0$, d. h. wie zu erwarten, bildet der Boden die wahrscheinlichste Lage des Teilchens während langer Zeiten. Dagegen erkennt man aus der Formel gleichfalls daß die mittlere Entfernung des Teilchens vom Boden endlich und von Null verschieden ausfällt, und zwar

$$(17) \quad \bar{x} = \frac{c}{D} \int_0^{\infty} x e^{-\frac{cx}{D}} dx = \frac{D}{c}.$$

\bar{x} wird von Smoluchowski als „Dicke der Sedimentations-schicht“ bezeichnet.

Um nun an unserer Beobachtungsreihe die Ergebnisse vorstehender Theorie zu prüfen, bemerken wir, daß die Wahrscheinlichkeit des Aufenthaltes des Teilchens zwischen den Ebenen $x = x_1$ und $x = x_2$ offenbar gleich ist der relativen Verweilzeit des Teilchens im besagten Intervalle, die man ja

1) M. v. Smoluchowski, Phys. Zeitschr. 17. p. 591. 1916.

aus Fig. 3 direkt ablesen kann, indem man alle Zeiten addiert, die man erhält, indem man die Abszissendifferenz zwischen Ein- und Austrittsstelle der Kuve in das Intervall mißt. Um die Resultate mit Formel (16) zu vergleichen, schreibe ich sie in folgender integrierten Form:

$$w(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{c}{D}x} = e^{-\frac{c}{D}x_1} - e^{-\frac{c}{D}x_2}.$$

Setzen wir $x_2 = h = 1 + x_1$, d. h. berechnen wir die Wahrscheinlichkeit eines Aufenthaltes zwischen dem Teilstriche h und $h+1$ des Mikrometers und bezeichnen diese mit w_h , so erhalten wir

$$(16a) \quad w_h = e^{-\frac{c}{D}h} - e^{-\frac{c}{D}(h+1)} = (1 - w_0)^h w_0.$$

Aus der folgenden Tab. 9, die in der ersten Spalte die Intervalle der Okularmikrometerteile, in der zweiten die beobachteten relativen Verweilzeiten, in der dritten die aus (16a) unter Zugrundelegung des gefundenen w_0 berechneten Werte von w enthält, sieht man, daß im großen und ganzen zwischen den beobachteten und berechneten Werten Übereinstimmung herrscht, daß also die angewandte Methode der relativen Verweilzeiten auf die Sedimentation gerechtfertigt erscheint.

Tabelle 9.

Intervall	w_h (beob.)	w_h (ber.)
0-1	0,656	0,656
1-2	0,196	0,226
2-3	0,124	0,078
3-4	0,024	0,023
4-5	0,000	0,008

Aus Formel (16a) entnehmen wir

$$w_0 = 1 - e^{-\frac{c}{D}},$$

oder

$$\frac{c}{D} = -\log(1 - w_0).$$

Für unseren Fall ergibt sich

$$\frac{D}{c} = 0,937.$$

Wir können noch auf einem anderen Wege zu dem Werte von D/c kommen, indem wir nach (17) den durchschnittlichen Aufenthalt des Teilchens zu bestimmen suchen. Zu diesem Zwecke bestimme ich aus Fig. 3 die Anzahl der Durchgänge der Kurve durch die Geraden mit den Ordinaten 0, 1, 2 ... und habe nun, um die durchschnittliche Ordinate zu finden, jede der Zahlen 0, 1, 2 ... mit ihrer derart gefundenen Häufigkeit zu multiplizieren und durch die gesamte Zahl zu dividieren. Dabei ist zu beachten, daß jede Spitze unserer Kurve als doppelter Durchgang zu zählen hat, da er nach der Beobachtungsmethode tatsächlich einem solchen entspricht.

Die Ausrechnung ergibt

$$\bar{x} = 1,298 = \frac{D}{c}.$$

Für die spätere Berechnung nehmen wir aus den beiden gefundenen Werten das Mittel und setzen

$$\bar{x} = \frac{D}{c} = 1,118$$

in Längeneinheiten des Okularmikrometers.

Gelingt es nun, außerdem noch die Fallgeschwindigkeit c allein zu ermitteln, so besitzen wir einen Wert von D , den man wieder im Vereine mit c zur Ermittlung der Loschmidt'schen Zahl benutzen kann, wie es Smoluchowski (l. c.) vorschlägt.

Den Wert der Fallgeschwindigkeit c kann man nun aber ermitteln, ohne eigene Versuche an demselben Teilchen dazu anstellen zu müssen, was mit experimentellen Schwierigkeiten verbunden wäre, die man so umgehen kann. Wir können nämlich annehmen, daß die reflektierende Wirkung des Bodens verschwunden ist, wenn sich das Teilchen in einer vom Boden genügend weit entfernten Spitze unserer Kurve in Fig. 3 befindet. Bestimmen wir dann aus der Figur die Zeit, die es braucht, um zum ersten Male den Boden zu erreichen und teilen diese Zahl durch die gesamte Fallstrecke, so erhalten wir das Reziproke der gesuchten Fallgeschwindigkeit, wenn wir für eine größere Anzahl von Spitzen die Berechnung durchführen und aus den gefundenen Werten das Mittel nehmen. Zur Berechnung herangezogen wurden die am weitesten vom Boden entfernten Spitzen $x = 4$ und $x = 8$, aus denen sich

im Mittel für die Fallzeit über einen Teilstrich ergibt $\bar{t} = 5,24$ oder

$$c = \frac{1}{\bar{t}} = 0,1905.$$

Um nun zum Werte für die Loschmidtsche Zahl zu gelangen, brauche ich bloß Formel (12) anzuwenden, die durch Einführung von x an Stelle von D/c die Form annimmt:

$$(12a) \quad N = \frac{RT}{18\pi x} \sqrt{\frac{2g(d-d_0)}{\zeta^3 c^3}},$$

in der die Buchstaben die früher erklärte Bedeutung haben.

Zur Berechnung haben wir nun zu setzen:

$$R = 8,315 \cdot 10^7, \quad T = 298, \quad g = 981, \quad d - d_0 = 0,194, \quad \zeta = 0,0102, \\ \bar{t} = 1,118 \cdot 1135 \cdot 10^{-4}, \quad c = 0,1905 \cdot 1,135 \cdot 10^{-4}.$$

Durch Einsetzen in Formel (12a) ergibt sich

$$N = 64 \cdot 10^{22},$$

was mit den auf anderem Wege erhältlichen Werten in bester Übereinstimmung steht.

Was die Methode anlangt, möchte ich noch bemerken, daß sie, wie bereits Smoluchowski erwähnt, einen wesentlichen Fortschritt gegenüber der Perrinschen bedeutet, der gegenüber sie sich durch bedeutend größere Einfachheit auszeichnet. Mir scheint aber der von mir benutzte Weg des Markierens der Passagen durch die Teilstriche eines festen Mikrometers gegenüber der von Smoluchowski vorgeschlagenen Methode der Aufzeichnung der Lage des Teilchens in äquidistanten Zeitpunkten einen Vorteil zu besitzen, da sie erstens experimentell viel einfacher zu realisieren ist und zweitens die aufgenommene Reihe direkt gleichzeitig auch den Wert der Fallgeschwindigkeit liefert, ohne daß man dazu eigene Versuche an demselben Teilchen anstellen müßte, was wieder eine experimentelle Erleichterung bedeutet.

Die bis jetzt angestellten Betrachtungen illustrieren den sich nach genügend langer Zeit bei einer großen Anzahl von Teilchen einstellenden statistischen Gleichgewichtszustand und zeigen, daß man ihn auch durch Beobachtung einer Zeitgesamtheit an einem Einzelteilchen darstellen kann. Da dieser Gleichgewichtszustand das Maximum der Entropie darstellt, demonstrieren also die mit der Theorie übereinstimmenden Versuchsergebnisse die „Irreversibilität“.

Gerade die Beobachtung des Einzelteilchens gibt nun aber auch die Möglichkeit, die im Gegensatze zum 2. Hauptsatze stehende prinzipielle Reversibilität im Laufe der Zeit vor Augen zu führen. Wie man aus der Kurve 8 ersieht, ist der Boden allerdings als Aufenthalt extremer Wahrscheinlichkeit ausgezeichnet, doch werden von dem Teilchen entgegen dem 2. Hauptsatz der Thermodynamik innerhalb genügend langer Zeit tatsächlich auch Punkte in größerer Entfernung vom Boden erreicht, wobei sich das Teilchen entgegen der Schwere bewegen muß und daher auf Kosten der inneren Energie des umgebenden Mediums Arbeit leistet. Da die Entropie des Systems in diesem Falle einfach eine monotone Funktion des Bodenabstandes ist, kann man qualitativ die Kurve direkt als Entropiekurve auffassen, wodurch auf eine in die Augen springende Weise die Auffassung der Entropie im Boltzmannschen Sinne als Zustandswahrscheinlichkeit plausibel wird. Die Kurve hat ganz den Charakter der vielumstrittenen Boltzmannschen H -Kurve, eine Kurve, von der Boltzmann bekanntlich die scheinbar paradoxe Behauptung aufstellte, daß sie überall ein Maximum besitzen müßte. Nun sieht man tatsächlich, daß die Kurve überall, wo sie sich etwas weiter von der Ruhelage entfernt, fast sofort wieder nach abwärts geht. Indem man berücksichtigt, daß ja nur die eingetragenen Punkte tatsächlich beobachtet sind, und daß der Charakter der Kurve in den Zwischenpunkten gar nicht bekannt ist, hindert nichts, dieselbe Struktur, wie sie an der ganzen Kurve sichtbar ist, auch an jedem zwischen zwei Beobachtungspunkten befindlichen Kurvenstück in ähnlicher Weise ausgeführt zu denken. Vom mathematischen Standpunkte hat die auf diese Weise beliebig weit geführte Verfeinerung keine Schwierigkeit und es realisiert dann tatsächlich unsere Kurve das, was sich Boltzmann unter seiner H -Kurve vorstellt. Vom physikalischen Standpunkte scheint es allerdings, als ob man bei genügender Verfeinerung schließlich doch zu einer differenzierbaren Kurve gelangen müßte, wenn die Vorstellung der kinetischen Theorie ihren Sinn behalten soll. Doch spielt das für die Illustration durch unseren Fall keine Rolle, wie ja die Behauptung Boltzmanns auch nicht in dem streng mathematischen Sinne aufzufassen ist.

Um die Erscheinung der Reversibilität an den Beobachtungen am Einzelteilchen auch theoretisch zu verfolgen, wollen

wir uns die Aufgabe stellen, die Zeit zu bestimmen, die das Teilchen im Mittel braucht, um von dem willkürlich gewählten Ausgangspunkt x_0 nach aufwärts zum ersten Male bis zum Punkte $x = l$ zu gelangen. Die Rechnung soll auf ähnlichem Prinzip, wie in den vorausgehenden Fällen, durch Aufsuchung des den Randbedingungen angepaßten Quellenintegrals der Diffusionsgleichung gelöst werden.

Es handelt sich also um Lösung der Gleichung (2) unter der Randbedingung (14); zu dieser kommt nun aber noch die Bedingung hinzu, daß das Teilchen zur Zeit t zum ersten Male zum Punkte l gelangt sein soll. Er muß also für $x = l$ $u = 0$ sein. Es gelten also die Randbedingungen:

$$(18) \quad \begin{cases} \text{für } x = 0 & D \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{c}{2} u = 0, \\ \text{,, } x = l & u = 0, \\ \text{,, } t = 0 & u = \Phi(\alpha). \end{cases}$$

Die Lösung ergibt sich analog dem Problem aus der Theorie der Wärmeleitung, wenn eine Platte, in der die Temperaturverteilung zur Zeit Null gegeben ist, an beiden Begrenzungsebenen gegen den umgebenden Raum Wärme ausstrahlt. Dieser Fall ist von Kirchhoff¹⁾ ausführlich behandelt worden, an dessen Ausführungen ich mich hier anlehne.

Ich setze zunächst

$$u = e^{-\alpha^2 D t} \left(\cos \alpha x - \frac{c}{2 D \alpha} \sin \alpha x \right),$$

wo α eine noch zu bestimmende willkürliche Konstante bedeutet. Dieser Ansatz genügt der Differentialgleichung (2) und der ersten Randbedingung. Damit auch die zweite befriedigt werde, muß sein

$$e^{-\alpha^2 D t} \left(\cos \alpha l - \frac{c}{2 D \alpha} \sin \alpha l \right) = 0,$$

oder

$$(19) \quad \cos \alpha l = \frac{c}{2 D \alpha} \sin \alpha l.$$

Bezeichnen wir die Wurzeln der transzendenten Gleichung (19) mit α_n , so lautet die allgemeine Lösung

$$(20) \quad u = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\alpha_n^2 D t} \left(\cos \alpha_n x - \frac{c}{2 D \alpha_n} \sin \alpha_n x \right),$$

1) G. Kirchhoff, Vorlesungen über die Theorie der Wärme. p. 30. Leipzig 1894.

wo die A_n so zu bestimmen sind, daß auch noch die Anfangsbedingung befriedigt wird.

$$\Phi(x) = \sum A_n \left(\cos \alpha_n x - \frac{c}{2D\alpha_n} \sin \alpha_n x \right) = \sum A_n X_n. \quad (22)$$

Wenn wir zur Abkürzung setzen

$$X_n = \cos \alpha_n x - \frac{c}{2D\alpha_n} \sin \alpha_n x.$$

Es handelt sich nun darum, die Koeffizienten A_n zu bestimmen. Man geht hier analog vor, wie bei der Entwicklung einer Funktion in eine Fouriersche Reihe. Man überzeugt sich leicht von folgenden Identitäten:

$$\int_0^l X_n X_m dx = 0 \quad \text{für } m \neq n$$

und

$$\int_0^l X_n^2 dx = \frac{\alpha_n^2 + \frac{c^2}{4D^2}}{2\alpha_n^3} l - \frac{c}{4D\alpha_n^3},$$

daher ist

$$\int_0^l \Phi(x) X_n dx = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \int_0^l X_m X_n dx = A_n \left(\frac{\alpha_n^2 + \frac{c^2}{4D^2}}{2\alpha_n^3} l - \frac{c}{4D\alpha_n^3} \right), \quad (23)$$

woraus man bei gegebenem Φ die A_n bestimmen kann.

Durch Einsetzung in (20) erhält man unter Berücksichtigung unserer Voraussetzungen über $\Phi(x)$

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} u &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \\ &\left\{ e^{-\alpha_n^2 D t} \frac{2D\alpha_n \cos \alpha_n x - c \sin \alpha_n x}{(4D^2\alpha_n^2 + c^2)l - 2Dc} (2D\alpha_n \cos \alpha_n x_0 - c \sin \alpha_n x_0) \right\} \end{aligned} \right.$$

woraus sich das gesuchte w durch Einsetzung in

$$w = u e^{-\frac{c}{2D}(x-x_0) - \frac{c^2 t}{4D}}$$

ergibt.

Analog wie bei den Betrachtungen über die Erstpassezeiten im I. Teil dieser Arbeit erhalten wir daraus endlich die gesuchte Wahrscheinlichkeit (unter Berücksichtigung von [19]):

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} K(t) dt &= -D \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=l} dt = \frac{2D}{c} e^{-\frac{c}{2D}(t-x_0)} - \frac{c^2 t}{4D} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ e^{-\alpha_n^2 D t} \frac{\alpha_n \cos \alpha_n l}{l - \frac{2Dc}{4D^2 \alpha_n^2 + c^2}} (2D \alpha_n \cos \alpha_n x_0 - c \sin \alpha_n x_0) \right\} dt. \end{aligned} \right.$$

Durch Ausrechnung kann man sich in der Tat überzeugen, daß $\int_0^{\infty} K(t) dt = 1$ erfüllt ist.

Der gesuchte Mittelwert der Zeit also, die das Teilchen braucht, um vom Ausgangspunkte x_0 entgegen der Schwere bis zum Punkte $x = l$ zu gelangen, ist daher gleich

$$\bar{t} = \int_0^{\infty} K(t) dt = \frac{32D^3}{c} e^{-\frac{c}{2D}(1-x_0)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n \cos \alpha_n l (2D \alpha_n \cos \alpha_n x_0 - c \sin \alpha_n x_0)}{(4D^2 \alpha_n^2 + c^2) [(4D^2 \alpha_n^2 + c^2) l - 2Dc]}.$$

Die Formel läßt sich wesentlich vereinfachen, wenn man eine Funktion so finden kann, daß ihre Entwicklung nach den Größen X_n gerade die obenstehende Gestalt hat. Die etwas umständliche Rechnung übergehe ich und schreibe gleich das Resultat an, von dem man sich nachträglich überzeugen kann, daß es mit der oberen Formel identisch ist:

$$(23) \quad \bar{t} = \frac{1}{c} \left\{ x_0 - l + \frac{D}{c} \left(e^{\frac{c}{D}l} - e^{\frac{c}{D}x_0} \right) \right\}.$$

Wir wollen die Formel in etwas anderer Gestalt schreiben, indem wir $l = x_0 + b$ setzen, d. h. wir fragen nach der Mittelzeit, die das Teilchen braucht, um sich vom Punkte x_0 zum ersten Male um die Strecke b nach aufwärts zu bewegen.

$$(23a) \quad \bar{t} = \frac{1}{c} \left\{ -b + \frac{D}{c} e^{\frac{c}{D}x_0} \left(e^{\frac{c}{D}b} - 1 \right) \right\}.$$

Durch Entwicklung von $e^{\frac{c}{D}b}$ nach Potenzen des Exponenten leitet man für den Grenzfall $c = 0$ die Formel ab:

$$(23b) \quad \bar{t}_0 = \frac{b^2}{2D} + \frac{b x_0}{D}.$$

Diese Formel geht für $x = 0$ in die für die mittlere doppelseitige Erstpassagezeit über, was man von vornherein allein vermöge des Spiegelungsprinzips hätte voraussagen können, während für große Werte von x_0 auch \bar{t}_0 sehr groß

wird, wie es die Formel für die mittlere *einseitige* Erstpassagezeit verlangt, denn in diese muß ja (23b) bei genügender Entfernung vom Boden jedenfalls übergehen.

Formel (23b) speziell kann man natürlich auch auf einfacherem Wege erhalten, wenn man gleich zu Anfang der Rechnung $c = 0$ einführt.

Formel (23a) läßt sich an den Versuchsergebnissen unmittelbar verifizieren, indem man aus Fig. 3 die Zeiten bestimmt, die zwischen der Passage der Kurve durch einen Teilstrich k bis zu der durch den Teilstrich $k + 1$ verlaufen, und aus ihnen das Mittel nimmt. Tab. 10 enthält für verschiedene k die beobachteten und die aus Formel (23a) berechneten Werte von \bar{t} nebeneinander. Man sieht, daß mit Ausnahme von $k = 2$ die Übereinstimmung recht befriedigend ist, daß daher die angewandte Überlegung auf diesen Fall zulässig erscheint.

Tabelle 10.

k	\bar{t} (beob.)	\bar{t} (ber.)
0	6,97	5,2
1	25,81	25,0
2	22,82	73,5
3	100,25	102

Damit wollen wir nun die Betrachtungen über die Sedimentation abschließen und uns den eingangs erwähnten über die Erscheinungen der Schwankungen zuwenden.

C. Schwankungserscheinungen.

Hat man eine große Anzahl ähnlicher Substanzteilchen, die dem Einfluß der Brownschen Bewegung unterworfen sind, so kann man makroskopisch, wie bereits ausführlich erörtert, die Veränderungen ihrer Konzentration als Funktion von Ort und Zeit erhalten durch Lösung der (makroskopischen) Diffusionsgleichung. Die Übertragung auf die Bewegung eines Einzelteilchens hat uns gelehrt, daß die innerhalb langer Zeiträume von einem solchen Teilchen dargestellte Zeitgesamtheit sich analog verhält. Gleichzeitig sehen wir aber, daß innerhalb kurzer Zeitstrecken die Sache gerade umgekehrt ist; die Bewegung des Teilchens läßt sich dann mittels der makroskopischen Überlegungen nicht mehr verfolgen, der Vorgang wird vollständig ungeordnet.

Die Theorie der Konzentrationsschwankungen, wie sie von Smoluchowski und anderen¹⁾ aufgestellt wurde, hat gezeigt, wie man noch diese scheinbar regellosen Schwankungen einem statistischen Gesetze unterordnen kann und für die Größe und Geschwindigkeit dieser Schwankungen Formeln aufgestellt. Diese Formeln für die Konzentrationsschwankungen in einer Emulsion sind aber natürlich weit allgemeinerer Natur und lassen sich jedenfalls auf jede Reihe von Zahlengrößen anwenden, wenn dieselben so beschaffen sind, daß man sie als statistische Abweichungen einer Durchschnittsgröße auffassen kann.

Die Brownsche Bewegung an einem Einzelteilchen, wie sie im ersten Teil dieser Arbeit dargestellt wurde, ist nicht von dieser Art; denn die Verschiebungen des Teilchens aus seiner Anfangslage sind nicht statistische Abweichungen von einer Durchschnittslage, da jeder Teilchenlage gleiche Wahrscheinlichkeit zukommt. Wohl aber lassen sich auf die Beobachtungen des II. Teiles über die Bewegung in der Nähe des Gefäßbodens diese Formeln anwenden, da wir ja gesehen haben, daß tatsächlich die Entfernung des Teilchens vom Boden einen Durchschnittswert besitzt, und daß sich die Entfernung im allgemeinen jedenfalls als statistische Abweichung von diesem Durchschnittswert darstellen läßt.

Man kann daher versuchen, die Formeln für die Konzentrationsschwankungen auf diese Erscheinungen zu übertragen, indem man statt der durchschnittlichen Teilchenzahl pro Volumeinheit die durchschnittliche, und statt der beobachteten Teilchenzahl die beobachtete Entfernung vom Boden einführt, gemessen in Teilstrichen des Okularmikrometers. Wenn die Übereinstimmung auch nicht immer quantitativ streng ist, so ist jedenfalls die qualitative Zulässigkeit dieser Übertragung aus dem folgenden ersichtlich.

Für die relative Häufigkeit einer bestimmten Abweichung von der Durchschnittslage ergibt sich bei der erwähnten Übertragung folgende Formel:

$$(24) \quad w(n) = \frac{e^{-\bar{v}} \bar{v}^n}{n!},$$

1) M. v. Smoluchowski, Phys. Zeitschr. 17. p. 560ff. 1916; siehe daselbst auch ausführliche Literaturangaben.

worin n die beobachtete, ν die durchschnittliche Bodendistanz bedeutet. Für ν hatten wir im vorigen Kapitel gefunden:

$$\nu = 1,298.$$

Unter Zugrundelegung dieses Wertes ergibt sich für $n = 1, 2 \dots$ Formel (24), die Werte k (ber.), während die aus Fig. 3 entnommenen Häufigkeiten, die zur Berechnung von ν bereits herangezogen wurden, die Werte k (beob.) der folgenden Tab. 11 liefern.

Tabelle 11.

n	k (beob.)	k (ber.)
0	40	42
1	56	55
2	34	36
3	20	15
4	4	5
5	0	1

Bezeichnet man dasjenige, was der „Verdichtung“ bei Konzentrationsschwankungen entspricht, mit

$$\delta = \frac{n - \nu}{\nu},$$

so erhält man nach Smoluchowski (l. c.) folgende Formel für diejenige Größe, die man auch nach der Übertragung als „mittlere Schwankung“ bezeichnen wird:

$$(25) \quad \sqrt{\delta^2} = \frac{1}{\nu},$$

während δ selbstverständlich gleich Null sein muß. Berechnet man aus den Angaben der Tab. 11 die Werte δ^2 und die ihnen zukommenden relativen Häufigkeiten und bildet so die Größe δ^2 , so ergibt sich

$$\sqrt{\delta^2} = \sqrt{0,682} = 0,826,$$

während mit Benützung des früher gefundenen Wertes ν folgt:

$$\frac{1}{\nu} = 0,877.$$

Die Formeln für die „Schwankungsgröße“ bleiben also auch auf diese Übertragung anwendbar.

Wir wollen nun auch noch die Resultate betreffend die „Schwankungsgeschwindigkeit“ auf unseren Fall anwenden. Die betreffenden Formeln lauten so:

Bezeichnet man mit $\overline{\Delta}_n$ die in der Zeit t eintretende durchschnittliche Änderung der Teilchenzahl des Kolloids bei der Ausgangszahl n , so ist

$$(26) \quad \overline{\Delta}_n = (\nu - n) P,$$

wo P eine vom speziellen Mechanismus der Emulsion abhängige Funktion ist. Ist ferner $\overline{\Delta^2}$ das allgemeine Änderungsquadrat bei beliebiger Ausgangszahl, so gilt

$$(27) \quad \overline{\Delta^2} = 2 \nu P.$$

Man kann $\overline{\Delta}_n$ als die Änderungsgeschwindigkeit auffassen, und als solche habe ich sie auf folgende Weise auf den hier behandelten Fall übertragen.

Von einer bestimmten Höhe n ausgehend, bestimme ich aus Fig. 3 die Zeiten, die notwendig sind, damit sich das Teilchen zum Nachbarteilstriche bewegt, wobei ich diese positiv rechne, wenn das Teilchen sich *gegen* die Durchschnittshöhe hin bewegt hat, negativ dagegen, wenn es sich *von* dieser entfernt hat. Macht man ferner die vereinfachende Annahme, daß sich das Teilchen in der Zwischenzeit geradlinig und gleichförmig bewegt¹⁾, so stellen die reziproken Werte dieser Zeiten die Änderungsgeschwindigkeiten, also die Größen Δ_n dar, und ihr Mittelwert das gesuchte $\overline{\Delta}_n$. Auf ähnliche Weise erhält man die Werte von $\overline{\Delta^2}$.

Die Berechnung ergab folgende Werte:

$$\frac{\Delta_3}{3 - \nu} = 0,275, \quad \frac{\Delta_2}{2 - \nu} = 0,201, \quad \frac{\Delta_1}{1 - \nu} = 0,277,$$

die nach Formel (26) konstant gleich P sein sollten; die Forderung ist annähernd erfüllt und ergibt als Mittelwert für P den Betrag

$$P = 0,251.$$

Die Berechnung von $\overline{\Delta^2}$ ergibt

$$\overline{\Delta^2} = 0,582,$$

während sich mit Benutzung des oben angeführten Wertes von P und ν ergibt:

$$2 P \nu = 0,561.$$

1) Diese Annahme, die natürlich sicher unrichtig ist, muß man nicht machen, wenn man die auf diese Weise erhaltenen Werte der Δ_n als mittlere Werte der Änderungsgeschwindigkeit im erwähnten Intervalle ansieht.

Es liefert also ersichtlicherweise auch Formel (27) annähernd das richtige Resultat.

Zum Schlusse wollen wir noch den von Smoluchowski eingeführten Begriff der Wiederkehrzeit auf unseren Fall übertragen. Unter der Wiederkehrzeit Θ versteht er die im Mittel notwendige Zeit, damit das betrachtete System einen zur Zeit Null innegehabten Zustand, der vom normalen abweicht, zum ersten Male wieder annimmt. Dabei muß man beachten, ob die Beobachtung intermittierend (in gleichen Intervallen etwa) oder kontinuierlich vorgenommen wird. Für unseren Fall haben wir die Formel für kontinuierliche Beobachtung anzuwenden; sie lautet folgendermaßen:

$$(28) \quad \Theta_n = K \left(\frac{n!}{e^{-\nu} \nu^n} - 1 \right) \frac{1}{n + \nu},$$

wo K eine vom speziellen Mechanismus abhängige Konstante ist.

Die Berechnung wurde so vorgenommen, daß für eine Anzahl von Werten n die Wiederkehrzeiten Θ_n , die sich aus Fig. 8 ja direkt ablesen lassen, bestimmt wurden und aus ihnen für jedes n das Mittel genommen wurde. Diese Mittelwerte sind in Tab. 12 als Θ_n (beob.) eingetragen. Unter Zugrundelegung dieser Werte berechnete ich nun die Ausdrücke:

$$\frac{\Theta_n(n + \nu)}{\frac{n!}{e^{-\nu} \nu^n} - 1},$$

die nach Formel (18) konstant sein sollen. Jeder dieser Ausdrücke wurde nun als Gewicht mit der ihm zukommenden Häufigkeitszahl (Formel 24) multipliziert und alle diese Werte addiert. Die Summe gibt dann den wahrscheinlichsten Wert von K , der sich zu $K = 8,69$ ergab.

Mit diesem Werte für K wurden nun aus Formel (28) die Werte Θ_n (ber.) der Tab. 12 ausgerechnet. Man sieht auch hier wieder, wie bei den vorangehenden Beispielen, daß die Übertragung der Formeln auf den hier behandelten Fall zu durchaus befriedigenden Übereinstimmungen führt.

Tabelle 12.

n	Θ_n (beob.)	Θ_n (ber.)
0	18,72	20,6
1	6,70	7,42
2	11,01	9,29
3	18,72	19,0
4	93,60	50,3

Mit diesen Betrachtungen, die sich wohl noch ausdehnen ließen, will ich meine Arbeit vorläufig abschließen; die in ihrem Verlaufe erwähnten ungeklärten Ergebnisse bilden den Gegenstand fortgesetzter Untersuchungen und sollen erst nach deren endgültigem Abschlusse veröffentlicht werden.

Prag, im Juni 1917.

(Eingegangen 7. Juli 1917.)

2. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Gravitation.

*Bemerkungen zur gleichnamigen Abhandlung von
P. Gerber¹⁾;
von M. von Laue.*

Obwohl gleichzeitig von berufener astronomischer Seite in diesen Annalen dargelegt wird, daß der von Gerber aufgestellte Ausdruck für das Gravitationspotential bei folgerichtiger Anwendung nicht zu Gerbers Bewegungsgleichungen und somit auch nicht zu seiner Formel für die Perihelbewegung führt²⁾ wollen wir hier doch die Frage aufwerfen, inwiefern seine Überlegungen überhaupt einen Zusammenhang zwischen den Planetenbahnen und der Ausbreitung der Gravitationswirkungen herstellen. Wir müssen uns freilich versagen, seinen Überlegungen Schritt für Schritt nachzugehen, um ihre Unrichtigkeit zu beweisen; es fordern gar zu viele Punkte darin zum Widerspruch heraus, und andere Stellen sind wiederum viel zu unklar und verwaschen. Wir wollen uns vielmehr zunächst nur an den mathematischen Ausdruck für das Gravitationspotential

$$V = \frac{\mu}{r \left(1 - \frac{1}{c} \frac{dr}{dt}\right)^2}$$

halten.

Hierin ist r der *im gleichen Augenblicke herrschende* Abstand des angezogenen vom anziehenden Körper, und die Geschwindigkeit dr/dt , mit der er sich ändert, bezieht sich ebenfalls auf den gleichen Zeitpunkt. Breitet sich aber die Gravitation mit endlicher Geschwindigkeit aus, so kann der physikalische Zustand am Ort des angezogenen Körpers nicht bestimmt sein durch die *gleichzeitige* Lage und Geschwindigkeit des anziehenden, sondern nur durch seine Lage und

1) P. Gerber, Ann. d. Phys. 52. p. 415. 1917.

2) H. v. Seeliger, Ann. d. Phys. 53. p. 131. 1917.

Geschwindigkeit in einem bestimmten früheren Augenblick. Denken wir uns z. B. den anziehenden Körper aus dem Ruhezustand durch einen äußeren Eingriff plötzlich in Bewegung gesetzt, so muß eine endliche Zeit vergehen, bis sich dies an einem entfernten Orte bemerkbar macht. Die verzögerten Potentiale

$$\varphi = \frac{e}{4\pi \left[r \left(1 - \frac{v_r}{c} \right) \right]_{t-\frac{r}{c}}}, \quad a = \frac{e}{4\pi} \left[\frac{v}{r \left(1 - \frac{v_r}{c} \right)} \right]_{t-\frac{r}{c}},$$

welche die Elektrodynamik für eine mit der Geschwindigkeit v bewegten Punktladung e aufstellt¹⁾, geben dies durch den Index $t - r/c$ zu erkennen, da er bedeutet, daß sowohl für r wie für v die zu der früheren Zeit $t - r/c$ geltenden Werte zur Berechnung des Potentials für die Zeit t zu benutzen sind. *Gerbers Ansatz für das Gravitationspotential ist also mit einer endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit unvereinbar.*

Die Sache liegt ähnlich wie beim Weberschen Grundgesetz der Elektrodynamik, mit welchem Gerbers Potentialansatz überhaupt eine gewisse Ähnlichkeit hat. Obwohl das „effektive Potential“ des Weberschen Gesetzes

$$\frac{ee'}{r} \left[1 + \frac{1}{2c^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right]$$

die Lichtgeschwindigkeit c enthält, verfiel Weber durchaus den Standpunkt der Fernwirkung.²⁾

Sodann behandelt Gerber bei seiner Aufstellung und Verwertung der Bewegungsgleichungen den anziehenden Körper, die Sonne, als im Koordinatenanfang ruhend. Das zugehörige Gravitationsfeld wird dann naturgemäß zeitlich unveränderlich, ob nun die Ausbreitung der Gravitation Zeit erfordert oder nicht. Wie soll sich unter diesen Umständen in der errechneten Bewegung des Planeten eine Wirkung der Ausbreitungsgeschwindigkeit äußern?

Freilich weiß Gerber, daß in dieser Annahme eine Vernachlässigung steckt, und er versucht dies durch die Abänderung der Sonnenmasse wieder gut zu machen, welche man in der Newtonschen Theorie dazu benutzt.³⁾ Diese

1) Vgl. z. B. H. A. Lorentz, Encykl. d. mathemat. Wissensch. 5. Artikel 14, Nr. 17.

2) Vgl. hierzu Encykl. d. mathem. Wissensch. 5. Artikel 12, Nr. 6 u. 7.

3) P. Gerber, l. c. p. 437 unten.

Korrektion findet in der alten Theorie ihre Berechtigung durch den Impulssatz, demzufolge die Summe aus dem Impuls der Sonne und dem des Planeten unveränderlich, und zwar gleich Null ist. Dies aber beruht wieder auf der Fernwirkung der Gravitation, denn nur bei Fernwirkung kann jede Änderung des Sonnenimpulses *sofort* durch eine Änderung des Planetenimpulses ausgeglichen werden. Sonst bedarf es dazu, wenn es überhaupt einen Ausgleich gibt, der vom Abstand abhängigen Übertragungszeit. Ist somit in Gerbers Theorie diese Korrektion unberechtigt, insofern ja gerade eine endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit eingeführt werden soll, so ist sie andererseits nicht imstande, diese Geschwindigkeit mathematisch einzuführen, da sie mit ihr nicht zusammenhängt. Selbst wenn die Ausgangsformel für das Potential die Ausbreitungsgeschwindigkeit zum Ausdruck brächte, könnte bei der weiteren Behandlung, die Gerber seinem Problem angedenken läßt, die errechnete Planetenbewegung deren Einfluß nicht zeigen.

Wenn die Einsteinsche Theorie der Gravitation¹⁾ die richtige Perihelbewegung für den Merkur liefert, so liegt dies, da auch sie dabei die Sonne als ruhend ansieht, nicht an der Art, wie sich nach ihr die Gravitation ausbreitet, sondern an anderen ihrer Züge. Wir möchten in diesem Zusammenhange auch darauf hinweisen, daß die Nordströmsche Theorie der Gravitation, trotzdem sie die Ausbreitungsgeschwindigkeit annimmt, die Perihelbewegung sogar mit dem verkehrten Vorzeichen liefert.²⁾

1) A. Einstein, Sitzungsberichte der Berliner Akademie 1916. p. 688.

2) S. Nordström, Ann. d. Phys. 42. p. 533. 1913; 43. p. 1101. 1914; vgl. auch M. v. Laue. Jahrbuch der Radioaktiv. u. Elektronik 14. Heft 3. 1917. (Im Erscheinen begriffen.)

(Eingegangen 28. Juni 1917.)

3. Über den inneren Aufbau von Gleitbüscheln und die Gesetze ihrer Leuchtfäden; von Max Toepler.

(Hierzu Tafel I und II.)

Gleitbüschel und Gleitfunken sind von mir in früheren Arbeiten eingehend untersucht.¹⁾ Das Interesse wendete sich hierbei bisher überwiegend der Tatsache zu, daß man mit Spannungen, die im Vergleiche zu den für Entladung im freien Raume erforderlichen klein sind, doch lange Gleitfunken erzwingen kann (z. B. mit 60 K. V. bis zu 2 m lange Funken). Dementsprechend beziehen sich die bisher aufgefundenen Gesetzmäßigkeiten fast ausschließlich auf die Gesamtdimensionierung (Länge und Breite) in ihrer Abhängigkeit von der Höhe der Spannung, der Art der Spannung (konstant oder wechselnd), der Natur der Oberfläche auf der das Gleiten stattfindet, des Materials und der Dicke des Isolators.

Eine eingehende Analyse der Struktur der Gleitbüschel fehlt meines Wissens noch. Mit Hilfe des Anblickes läßt sich bei so kurz dauernden und in den Einzelheiten sehr lichtschwachen Erscheinungen wenig erreichen; bekannt ist aber²⁾,

1) M. Toepler, *Abh. Isis*, Dresden 1897; *Wied. Ann.* **66**, p. 1061. 1898; *Ann. d. Phys.* **21**, p. 193. 1906; **23**, p. 867. 1907; *Abh. Isis*, Dresden 1907; *Verh. d. Deutsch. Phys. Ges.* **9**, p. 422. 1907; *Physik. Zeitschr.* **8**, p. 743. 1907; *Ann. d. Phys.* **25**, p. 745. 1908.

Daß es sich bei Bildung von Gleitbüscheln auf rückwärts metallisch belegten Isolatorplatten (Glas, Glimmer usw.) noch um Phänomene handelt, die *wesentlich in der Luft* am Isolator erfolgen, wurde dadurch bewiesen, daß die gleitende Entladung dieselbe Ausdehnung und Ausbildung besitzt auf glatten, gerauhten, befeuchteten oder auch mit Schwefelmennige Pulver bestäubten Isolatoroberflächen, unabhängig (bei gleichbleibender Kapazität der ebenen Oberflächeneinheit) vom Material des Isolators.

2) Vgl. z. B. die Aufnahmen von H. Pflaum, *Korrespondenzblatt des Naturforscher-Vereins zu Riga* **40**, 1898, Taf. IV u. V, daselbst auch eine Zusammenstellung der Literatur.

daß man sehr schöne Spuren mit vielen Einzelheiten der sogen. Lichtenberg'schen Figuren, erhält, wenn man die Gleitbüschel direkt auf der Schichtseite photographischer Platten entstehen läßt.

Aus den angeführten Messungen wissen wir, daß die einfachste Art von Gleitbüschelbildung dann eintritt, wenn man an die Gleitpole ganz *plötzlich* eine Spannung anlegt, welche dann wenigstens für die kurze Zeit der Gleitbüschelbildung *konstant* bleiben muß.

I. Versuchsanordnung.

Es bedeutet in der Skizze, Fig. 1, *M* eine vielplattige Toeplersche Influenzmaschine, *F* eine regulierbare Funkenstrecke zwischen Messingpolkugeln von je 6 cm Durchmesser,

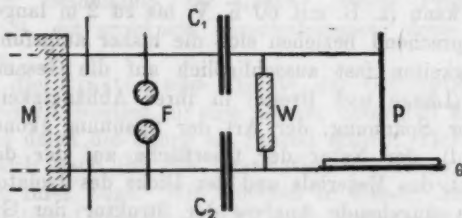


Fig. 1.

*C*₁ und *C*₂ zwei Kapazitäten von je 80000 cm, *W* einen Flüssigkeitswiderstand von etwa 5—10 Millionen Ohm; neben diesen Widerstand war das Gleitsystem, Gleitpol *P* und rückwärts belegter Glasblock *G*, geschaltet. Alle Leitungen der Versuchsanordnung bestanden aus möglichst kurzen, mindestens 0,2 cm starken Kupfer- oder Messingdrähten, gegen Ausstrahlung durch übergezogene Glasrohre geschützt, sie wurden möglichst selbstinduktionslos verlegt.

Das an *W* nebengeschaltete Gleitsystem bestand aus dem Gleitpol *P*, einem 20 cm langen 0,2 cm dicken Kupferstabe mit abgerundetem Ende; dieser stand senkrecht auf der oberliegenden Schicht der photographischen Platte *G*; deren Rückseite war *voll*, d. h. nach allen Richtungen hin gegenüber dem Gleitpol der Schichtseite mit Stanniol belegt, welches

den zweiten Pol des Systems bildete.¹⁾ Um den Einfluß der *Kapazität der Plattenoberflächeneinheit* festzustellen wurden nicht nur photographische Platten verschiedener Dicke (in den Tabellen die Platten von 0,1—0,2 cm) benutzt. Es wurde weiter dann eine, zwei, schließlich vier Glasplatten noch zwischen die photographische Platte und das Stanniol zwischengelegt. Die schmalen Zwischenräume wurden hierbei mit Äthylalkohol ausgegossen; da letzterer ein Nichtleiter von großer Dielektrizitätskonstante (gleich 26 gegenüber der des Glases von etwa 6) ist, so müssen hierdurch die aufeinandergeschichteten Platten dielektrisch *wie ein einziger Glasblock* wirken. In der Tab. I sind die Dicken von 0,2—0,4 cm durch eine Zusatzscheibe, die Dicken 0,4—0,5 cm durch zwei Scheiben, die letzte Dicke 0,56 cm durch drei Scheiben erhalten. In Tab. II und V war nichts zwischengelegt; in Tab. III und VI eine einzige 0,496 cm dicke 30×40 cm große Spiegelglasscheibe auf 30×30 cm großer Stanniolfläche, in Tab. VII waren zwei von der Gesamtdicke 0,784 cm in Tab. IV und VIII waren vier solche Spiegelglasplatten, geschnitten aus ein und derselben großen Spiegelglasscheibe mit der Gesamtdicke 1,508 cm zwischengelegt. Die elektrostatische Abdichtung erfolgte auch hier mit Äthylalkohol.

Der zwischen die Batterieaußenbelege geschaltete Widerstand W ermöglicht deren Ladung. Bricht dann bei F ein Funken aus, so entsteht beiderseits W , also auch an den Gleitpolen *plötzlich* eine Spannung. Die wirksame Kapazität der Versuchsanordnung betrug 40000 cm, war also so groß, daß durch das Abfließen von Elektrizität zur Bildung von Gleitbüscheln um P herum auf G keine wesentliche Herabsetzung der Spannung eintrat. Die Spannung am Gleitpole

1) Mit dieser Versuchsanordnung erhielt ich die regelmäßigst gebauten Gleitspuren.

Wird an Stelle der rückwärtigen vollen Belegung als Gegenpol auch wieder ein Metallstab gewählt, so entsteht auf beiden Seiten der Glasplatte gleichzeitig je ein Gleitbüschel; diese beeinflussen sich in ihrer Ausbildung, so daß letztere wenig regelmäßig ausfällt.

Legt man auf die Nichtschichtseite der Platte einen Stanniolstreifen, so erscheint die Gleitfigur auf der Schichtseite in Richtung des Streifens lang ausgezogen; durch diesen Kunstgriff erhält man auch nur wenig regelmäßig gebaute, aber, wie früher gezeigt, besonders *lange* Gleitbüschel (und Gleitfunken).

springt also bei Ausbruch des Funkens F plötzlich (etwa innerhalb 10^{-7} sec)¹⁾ auf den der Funkenlänge F entsprechenden, also angebbaren Betrag. Da die Wachstumsgeschwindigkeit von Gleitbüscheln sehr groß ist (selbst 110 cm lange Gleitbüschel bilden sich innerhalb $20 \cdot 10^{-6}$ sec)²⁾, so ist also trotz Vorhandenseins von W die Spannung am Gleitpole P dann weiterhin während der Gleitbüschelbildung als konstant anzusehen.³⁾

II. Messungen an negativen Gleitfiguren.

Auf einer Reihe von Platten wurden Serien von Aufnahmen derart gemacht, daß an jede folgende Platte unter sonst ungeänderten Versuchsbedingungen jeweils eine etwas höhere Spannung angelegt wurde. Die Photogramme⁴⁾ zeigen keine Folge von gleichartig gestalteten Spuren kontinuierlich wachsender Größe. Nur bei kleinen Spannungen zeigten sich kreisförmige Bilder (System zahlreicher radialer Fäden wie Photogramm 1 und 2), deren Durchmesser einfach mit der Spannung wuchs. Von einer bestimmten, wenn auch quantitativ nicht ganz festliegenden Spannung an, erscheint dann plötzlich ein zweites halbkreisförmiges Büschel an das Kreisbüschel um den Gleitpol irgendwo seitlich angesetzt, verbunden mit dem Gleitpole durch einen geradlinigen das Kreisbüschel radial durchsetzenden Ladungskanal. Weiterhin erhält man dann bei noch

1) Vgl. M. Toepler, Ann. d. Phys. 21. p. 221. 1906.

2) Vgl. l. c. p. 214.

3) Dauert die Spannung nur kurze Zeit an, oder sinkt sie z. B. wegen ungenügender Größe der Kapazitäten C_1 und C_2 beim Abfließen von Elektrizität zur Ladung der Gleitpur (oder durch W hindurch), so wird Wachstum und Ausbildung der Gleitpur beeinflusst, vgl. l. c., p. 208, sowie besonders M. Toepler, Ann. d. Phys. 23. p. 868, Fig. 1. 1907.

Hr. S. Mikola, Physik. Zeitschr. 18. p. 158. 1917, hat in seiner Veröffentlichung über Lichtenbergsche Figuren keine Angabe über die Größe der von ihm benutzten Kapazität gemacht. Es ist wohl zu vermuten, daß die quantitativen und auch qualitativen Abweichungen seiner Resultate gegen meine hier angegebenen, wie sie bei den positiven Polbüscheln sich ergeben (siehe Abschnitt V), sich daraus erklären, daß bei Mikola die Spannung während der Büschelbildung nicht konstant blieb.

4) Einige Photogramme sind auf Tafel I und II in natürlicher Größe dargestellt.

höheren Spannungen Aufnahmen mit zwei, drei oder mehr aneinandergereihten Büscheln, wie z. B. die Photogramme 3, 4, 5 und 6 zeigen, und wie in Fig. 2 schematisch dargestellt ist. Schließlich bekommt man die Fläche um den Gleitpol weithin nach allen Seiten bedeckende ausgedehnte Gleitbüschelspuren, aus lauter einzelnen Büscheln aufgebaut, die perlschnurartig auf die sie durchsetzenden Ladungskanäle (Funkenstücke) aufgereiht erscheinen. Die Aufladung der Fläche um den Gleitpol P erfolgt also in den einzelnen Gleitbüscheln nicht in einem kontinuierlichen Ergüsse, sondern ruckweise, mit Wachstumsstufen.

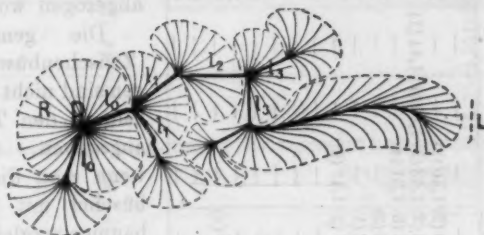


Fig. 2.

Eine voll entwickelte Spur besteht also (vgl. die schematisierte Fig. 2) aus einem kreisförmigen „Polbüschel“ um den Gleitpol P herum (Radius R) und einer Anzahl von „Gleitbüscheln“, in Fig. 2 deren zwei, ein kurzes und ein längeres. Letztere bestehen bei voller Ausbildung jeweils aus einem „Gleitbüschelstiele“ l_0 , den „Zwischenbüscheln“ (Längen $l_1, l_2 \dots l_n$) und den „Endbüscheln“ auf Hauptstamm und Seitenästen. Wie Fig. 2 andeutet, lassen sich die Größen $R, l_0, l_1, l_2 \dots l_n$ auf jeder einzelnen Photographie mit einiger Sicherheit feststellen. Ferner die gesamte „Gleitbahnlänge“ L jedes einzelnen Gleitbüschels, gemessen vom Pole aus längs des längsten Ladungskanales bis zum fernsten geladenen Punkte. Die früher gemessene „Gleitbüschellänge“ f bedeutet die Luftlinie vom Pole zum fernstgeladenen Plattenpunkte.

Zu den Angaben der nachstehenden Tab. I—IV ist noch zu bemerken:

Die Größe R bedeutet den Radius des Polbüschels, d. h. der radialen Lichtfäden, soweit deren Wachstum nicht durch Gleitbüschel behindert wurde, also bei Vorhandensein letzterer

δ zwischen $18,8^\circ$ und $19,1^\circ$ C.; b zwischen 74,0 und 75,4 cm.

F	P	α	R	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	L	l	$b_0/\sqrt{\alpha}$	$l/\sqrt{\alpha}$	Bemerkungen
0,50	17,1	0,108	1,81 (9)											vgl. Photogramm 1 vgl. Photogramm 3
		0,111	1,84 (8)											
0,75	25,2	0,110	1,88 (6)											vgl. Photogramm 1 vgl. Photogramm 3
		0,157	1,90											
0,75	25,2	0,161	2,20	1,86 (1)	1,73 (3)	1,45 (2)	1,50 (1)	1,30 (1)		9,1	1,56 (7)	4,64 (1)	1,56 (7)	vgl. Photogramm 1 vgl. Photogramm 3
		0,168	2,00											
0,50	17,1	0,160	2,03 (3)											vgl. Photogramm 2
		0,511	1,23 (4)											
0,75	25,2	0,527	1,90											vgl. Photogramm 2
		0,516	2,55											
1,00	32,6	0,569	2,50											vgl. Photogramm 2
		0,543	2,53 (2)											
1,25	39,7	0,578	3,17	2,80 (3)										Ausschnitt Photogr. 4
		0,542	—	3,06 (5)	2,90 (3)	3,0 (1)	2,7 (1)			13,2				
1,40	43,8	0,547	3,70	3,10 (4)	2,8 (1)	2,70 (3)				11,4				Ausschnitt Photogr. 5
		0,547	3,86	3,30 (1)	2,7 (1)					8,3				
1,40	43,8	0,548	3,41	3,17 (3)	2,73 (3)	2,8 (1)	2,4 (1)			16,3				Ausschnitt Photogr. 5
		0,561	3,88	3,43 (3)	3,4 (1)					9,3				
1,40	43,8	0,575	3,50	3,08 (2)	—					6,3				Ausschnitt Photogr. 6
		0,553	3,66 (5)	3,16 (18)	2,86 (5)	2,78 (5)	2,55 (2)			10,8	2,79 (15)	4,25 (18)	3,75 (15)	
1,50	46,4	0,531	3,70	3,15 (2)	3,03 (3)					12,8				Ausschnitt Photogr. 6
		0,542	3,75	3,80 (4)	2,9 (1)	2,7 (1)	2,75 (2)			14,5				
1,50	46,4	0,543	—	3,09 (8)	2,89 (2)	2,88 (3)	2,54 (3)			14,8				Ausschnitt Photogr. 6
		0,574	3,90	3,13 (3)	3,20 (2)	3,00 (2)	2,95 (2)			16,3				
1,50	46,4	0,548	3,78 (8)	3,09 (17)	2,91 (7)	2,74 (6)	2,72 (7)			14,6	2,79 (20)	4,17 (17)	3,77 (20)	Ausschnitt Photogr. 6
		0,548	3,78 (8)	3,09 (17)	2,91 (7)	2,74 (6)	2,72 (7)			14,6	2,79 (20)	4,17 (17)	3,77 (20)	

wäre.¹⁾ In solchen Fällen sind die Längen l_1, l_2 usw. natürlich sachgemäß als Größe der Teilbüschel aufzufassen und abzuschätzen, nicht als Ladungskanalstücke zwischen zwei Knickstellen.

Außer den voranstehend definierten Größen $R, l_0, l_1, l_2 \dots l_n, L$ enthalten die Tabellen noch Angaben über:

δ die Zimmertemperatur in Celsiusgraden,

b den Luftdruck in cm Quecksilber,

F die Primärfunkenlänge in cm bei F in Fig. 1,

P die ausgelöste Spannung am Gleitpole P in Kilovolt,

a die Dicke in cm des Glasblockes zwischen photographischer Schicht oben und Stanniolbelegung unten,

l den Mittelwert in cm jeweils aller $l_1, l_2 \dots$ bis l_n .

Die den einzelnen Mitteln in Klammern zugesetzten Ziffern bedeuten die *Anzahl* der Einzelwerte, aus denen jeweils das Mittel gezogen werden konnte.

Tabelle IV.

$\delta = 18,0^\circ \text{ C.}; b = 74,4 \text{ cm.}$

F	P	a	R	$(P - 4) : R$
0,50	17,1	1,626	1,00 bis 1,05	14,1 bis 12,5
0,75	25,2	1,632	1,65 " 1,70	12,8 " 12,5
1,00	32,6	1,620	2,35 " 2,50	12,2 " 11,4
1,25	39,7	1,696	2,55 " 2,90	14,0 " 12,3
1,50	46,4	1,666	3,10 " 3,40	13,7 " 12,4
1,50	46,4	1,688	3,00 " 3,45	14,1 " 12,2
1,75	52,8	1,683	3,50 " 4,00	13,9 " 12,2

III. Zusammenfassung der Messungsergebnisse für negative Gleitfiguren.

Für das Polbüschel ist aus den Tabellen zu errechnen: Der Radius R (in cm) des Polbüschels wächst mit der Spannung P (in Kilovolt) am Gleitpole nach den Interpolationsformeln

$$(1a) \begin{cases} P - 2 = 11,4 \cdot R \text{ für die Plattendicke } \dots a = 0,16 \text{ cm} \\ P - 3 = 11,6 \cdot R \text{ " " " } \dots a = 0,55 \text{ " } \\ P - 4 = 12,2 \cdot R \text{ bis } 13,9 \cdot R \text{ für die Dicke } a = 1,66 \text{ " } \end{cases}$$

1) Photographien von Blitzen zeigen auch nur die verstärkten Ladungskanäle, aus ihnen ist also kaum auf die feinere Struktur des blitzbildenden Prozesses zu schließen.

Bedenkt man, daß auf den dicksten Platten die gemessenen Werte R wegen der hier eintretenden Unschärfe der Begrenzung der Gleitspuren eher zu klein als zu groß, der Faktor neben R also zu groß ausfallen konnte, so erkennt man, daß der Einfluß der Plattendicke auf diesen Faktor *auffallend gering* ist.

R ist stets größer als l_0 . Da die radialen Nachbarfäden neben l_0 an ihren l_0 überragenden Enden meist seitlich abgedrängt erscheinen, so folgt, daß im Augenblicke des Durchbruches von l_0 alle Radialfäden des Polbüschels um P noch die gleiche Länge, nämlich l_0 besaßen, und daß erst weiterhin (während des Weiterwachsens der Spannung in P und damit der Gleitfigur über l_1, l_2 usw. bis ans Ende sich die ungehinderten Radialfäden des Polbüschels bis zur Länge R weiterbildeten. Das für R gefundene Spannungsgesetz gilt also auch für l_0 . Im Augenblicke des Durchbruches der weitergleitenden Plattenladung durch den Faden l_0 des Polbüschels hindurch herrscht also am Gleitpole eine Spannung

$$(2) \quad P_0 = 11,5 \cdot l_0 + 2,5 \text{ Kilovolt.}$$

Dabei hängt aber, soweit sich bisher erkennen ließ, die Gleitbüschelstiellänge l_0 , also auch die Durchbruchsspannung P_0 nicht von der gesamten an P auftretenden, also nach Durchbruch noch erreichten Spannung P ab.

Es ist l_0 von der Glasplattendicke a abhängig, oder als physikalisch wohl bedingender Größe von der Kapazität c der Plattenflächeneinheit. Es ergibt sich (k Dielektrizitätskonstante des Glases)

aus Tabelle I (mit überwiegend kleinem a) $l_0 = 4,220 \cdot \sqrt{a}$

aus Tabellen II u. III (mit überwiegend großem a) $l_0 = 4,210 \cdot \sqrt{a}$

im Gesamtittel also (aus 78 Einzeldaten)

$$(3) \quad l_0 = 4,216 \sqrt{a} = 4,216 \sqrt{\frac{k}{4\pi\epsilon_0}},$$

hierin sind l_0, a und c in Zentimetern gerechnet.

Die Kombination von (2) und (3) ergibt für die Spannung P_0 , bei der der Gleitbüscheldurchbruch erfolgt,

$$(4) \quad P_0 = 48,5 \sqrt{a} + 2,5 \text{ Kilovolt.}$$

Diese Durchbruchsspannung ist nun freilich in Wirklichkeit recht schwankend; sie lag

für $a = 0,16$ cm bei etwa 24 KV, die Formel gibt 22 KV
 „ $a = 0,55$ „ „ „ 39 „ „ „ 38 „
 „ $a = 0,96$ „ „ „ 48 „ „ „ 50 „

Die Zwischenbüschellängen auf jeder Platte sind nicht nur für jede Generation, sondern auch, wie die Tabellen zeigen, von Generation zu Generation, also allesamt gleich; eine kleine Abnahme der Größe mit wachsender Ordnungszahl der Generationen ist vielleicht zu bemerken. Dabei ist die Länge des einzelnen Zwischenbüschels unabhängig davon, ob seine Gestalt einen großen (bis mehr als 180° Öffnung) oder kleinen (bis unter 30°) Fächer, Kreissektor bedeckt.

Für die Abhängigkeit der untereinander gleichen Zwischenbüschellängen l_1, l_2 usw., also auch ihres Mittelwertes l von der Plattendicke a folgt

aus Tabelle I $l = 3,494 \cdot \sqrt{a}$

aus Tabellen II und III . . . $l = 3,781 \cdot \sqrt{a}$

als Gesamtmittel (aus 176 Einzeldaten)

$$(5) \quad l = 3,562 \cdot \sqrt{a} = 3,562 \sqrt{\frac{k}{4\pi c}},$$

hierbei sind wieder l, a und c in cm gewertet.

Bei sehr kleiner Kapazität der Plattenflächeneinheit wird also die Gleitspur aus sehr großen Büscheln bestehen.¹⁾

Von einer Angabe der Größe des auf jedem Aste jeweils letzten Büschels wurde abgesehen; der Radius dieses Büschels ist meist

1) Bei der Blitzbildung verändert ein Vorwärtswachsen des Büschels plötzlich das Potential des jeweils erreichten Raumelementes. Die Bedingungen für das Weiterwachsen stehen also in gewisser Analogie mit denen bei gleitender Entladung; an Stelle der flächenhaften Ausdehnung tritt die Raumerfüllung und an die Stelle der Kapazität der Oberflächeneinheit tritt die meist vergleichsweise wohl sehr kleine Aufnahmefähigkeit der Raumeinheit für Elektrizität bei der Potentialänderung. Das Vorwachsen der blitzbildenden Umladung des Raumes ist also in Analogie gleichfalls als ruckweise vor sich gehend anzunehmen, dabei aber die Ausdehnung der Ruckstufe als beträchtlich größer, als wie bei den untersuchten Gleitphänomenen. Aus den Beobachtungen eines Perlschnurblitzes habe ich geschlossen (Meteorol. Zeitschr. p. 225. 1917), daß in diesem Falle die Ruckstufen (d. h. die Zwischenbüschelgrößen l_n) je 7,5 m betragen.

nahe ebenso groß, wie die Längen l_1, l_2, l_3 usw., selten nur ist er kleiner. Öfters aber sind die letzten Büschel langgestreckt; ihre Breite ist dann nahezu $2 \cdot l$, ihre Länge dann meist nahe ein ganzzahliges Vielfaches von l , so daß anzunehmen ist, daß mangels Seitenästen eine zwar vorhandene Unterteilung nur nicht in Erscheinung getreten ist.

Die Gleitbahnlänge L und Gleitbüschellänge f sind bisher für rückwärts voll belegte Platten nicht gemessen. Bei den starken Schwankungen dieser Größen von Fall zu Fall kann nur ein ausgedehntes Beobachtungsmaterial einigermaßen sichere Schlüsse ziehen lassen. Solches (Längen f zwischen 10 cm und 120 cm und Glasdicken von 0,1—0,8 cm) liegt nur vor für gleitende Entladung auf Platten mit einem 2 cm breiten Stanniolstreifen auf der Rückseite; hierfür ergab sich¹⁾ die Interpolationsformel

$$(6) \quad f = \beta \cdot P^4 \cdot c^{1/4}$$

Für f in cm, P in Kilovolt, c in cm war bei positiven Gleitbüscheln $\beta = 4 \cdot 10^{-6}$ gefunden; für negative ist nur bekannt, daß sie demselben Gesetze gehorchen aber mit etwas kleinerer Konstanten. Bei kleinen Längen f , also auch beim ersten Durchbruche kann der Unterschied von Voll- oder nur Streifenbelegung nicht viel ausmachen; reicht die Interpolationsformel (6) bis zum Durchbruche, so ist Anschluß an die in vorliegender Arbeit aufgestellten Gleichungen 2 und 3 für den Durchbruch zu erwarten. Identifiziert man, um dies zu prüfen f mit l_0 und P mit P_0 und eliminiert mit Hilfe der Gleichungen 3 und 2 (diese ohne die nur kleine additive Konstante) so wird

$$(7) \quad \beta = \frac{\left(\frac{4\pi}{k}\right)^{1/4}}{4,22^4 \cdot 11,5^4}$$

also von c unabhängig, d. h. Gleichung 6 schließt sich in ihren Exponenten von P und c an die Gleichungen 2 und 3 an. Setzt man die Dielektrizitätskonstante k des Glases gleich 6, so erhält man β zu $2,30 \cdot 10^{-6}$, also auch quantitativ nicht stärkere Abweichung als zu erwarten.

Zu den Werten $L = 9,1, 10,8$ und $14,6$ der Tab. II und III gehören $f = 5,7, 8,9$ und $11,6$ cm, aus denen sich mit Gleichung (6) rechnet β zu $2,74 \cdot 10^{-6}, 2,97 \cdot 10^{-6}$ und $3,13 \cdot 10^{-6}$.

1) Vgl. M. Toepler, Ann. d. Phys. 21. p. 206. 1906.

IV. Bemerkenswerte Einzelheiten der negativen Gleitspuren.

Zu richtiger Ausdeutung der feinen Einzelheiten der Photogramme ist zweierlei zu berücksichtigen; die Photogramme sind *Summationsfiguren* zeitlich nicht ganz zusammenfallender Vorgänge, und sie geben das Gesamtphänomen nur mit *eigen tümlichen Defekten*. Letztere entstehen dadurch, daß von den lichtschwächeren Gebilden (Leuchtfäden) nur die eine photographische Spur hinterlassen, welche an der photographischen Schicht *unmittelbar* anliegen. Der gesamte Leuchtprozeß liegt aber z. T. etwas oberhalb der Platte und dies um so mehr, je kleiner die Kapazität der Plattenflächeneinheit ist. Dabei ist aber andererseits von Vorteil, daß nach dem Gesamtmechanismus der Bildung gleitender Ladung¹⁾ der Gleitprozeß die Platte möglichst lückenlos durch der Platte *möglichst naheliegende* Strömungsbahnen laden wird, daß also Überkreuzungen nur in seltenen Fällen eintreten werden, so daß, wo solche auftreten, meist auf eine relativ beträchtliche Zeitdifferenz zu schließen sein wird.

Soweit der *Anblick* von negativen Gleitbüscheln und vor allem auch von analogen negativen Raumbüscheln (negativer Streifenentladung) erkennen läßt, *bestehen alle diese negativen Büschel*, also alle Systemteile einer ausgedehnten Gleitfigur (mit Ausnahme natürlich der *funkenförmigen*, starken Ladungskanäle), *letzten Endes aus Leuchtfäden mit ihrer ganzen Länge nach nahe konstanter Dicke und Helligkeit* oder aus Bündeln solcher. Diese bildeten sich bei ihrem Entstehen jeweils in Richtung des momentanen elektrischen Feldes und erscheinen dem entsprechend öfters auch gekrümmt. Noch besser erkennt man sie in gasverdünnten Räumen (5—1 cm Quecksilberdruck), wo die Fäden wesentlich länger und dicker sind. Bei Atmosphärendruck beträgt die Leuchtfadenbreite etwa 0,02 cm. Das Aussehen der photographischen Spur scheint dieser Auffassung zunächst an vielen Stellen völlig zu wider-

1) Vgl. M. Toepler, Wied. Ann. 66. p. 1061. 1898. Nach angelegter Spannung fließt aus dem Pole Elektrizität auf die Platte; die jeweilige Ladung deformiert das ursprüngliche Feld; eine Weiterladung, ein Weiterwachsen des Gleitphänomens findet dort und dorthin statt, wo und wohin die Feldkomponente in Richtung der Plattenoberfläche hinreichend groß geworden ist; weiter vom Pole ab rührt das Feld ganz überwiegend von den schon auf die Platte geflossenen Elektrizitätsmengen her, das Feldstärkenmaximum liegt dicht auf der Plattenoberfläche.

sprechen. Ich habe jedoch kaum eine Stelle gefunden, welche unter Berücksichtigung der genannten Summationswirkung und der möglichen Defekte sich nicht als Superposition von Leuchtfäden ausdeuten ließe, viele Stellen dagegen die sehr dafür sprechen. So erscheinen z. B. ganz *homogen* geschwärzte Kreissektoren an der Peripherie fast immer in einzelne Fäden zerfasert, wie dies die Photogramme 4 und 5 an mehreren Stellen deutlich erkennen lassen, bestehen also aus lückenlos aneinander gelagerten Fäden. Merkwürdige Zeichnungen, wie sie besonders oft größere Polbüschel auf dicken Platten zeigen (vgl. Photogramm 2), wo die Leuchtfigur nicht mehr ganz eng auf der Platte aufliegt, lassen sich ungezwungen durch Annahme schwacher Überkreuzung verbunden mit Auf- und Absteigen der Fäden beim Überkreuzen erklären. Trifft ein Leuchtfaden, abgestoßen z. B. von übrigen, auf der Platte schon aufliegenden Leuchtfäden erst wo solche fehlen, d. h. in größerem Abstände, elektrostatisch auf die Platte herabgezogen, aus der Luft auf die Platte auf, so entsteht erst vom Auftreffpunkte aus ein Spurstück mit freiem Anfang und Ende. Ist das Wegstück durch die Luft kurz, so können natürlich vom Auftreffpunkt aus noch vollständig entwickelte sekundäre Gleitbüschel ausgehen, welche ihrerseits weiterwachsend, die Weiterentwicklung der auf der Glasplatte aufliegenden, also photographisch wirkenden benachbarten Leuchtfäden beeinflussen, sie zur Seite drängen. Es sieht dann aus, als ob zwischen der Radialstruktur „Nebenpole“ vorhanden wären¹⁾, welche die Nachbarfäden auseinanderdrängen, wie die Photogramme 2 und 5 erkennen lassen.

Durchmustert man eine größere Reihe von Aufnahmen ausgedehnter Gleitspuren, so findet man, daß diese zwar zu meist voll entwickelte Endbüschel besitzen; man bemerkt aber auch *alle Entwicklungsstadien neuer Endbüschel*. Aus ihnen kann man ein klares Bild darüber gewinnen, wie der Durchbruch

1) Daß jeder solcher Nebenbüschel von dem Fußpunkte einer Strömungsbahn ausgeht, welche vom Pole nicht auf der Platte eng anliegend verlief, also nicht mit photographiert wurde, ist dadurch leicht zu beweisen, daß das gesamte Polbüschel sich in lauter (etwa 10) solche Nebenbüschel auflöst, wenn der Gleitpol nicht auf der Platte aufsteht, sondern (am besten etwa um $R/2$) über der photographischen Schicht frei in der Luft endigt.

neuer Büschel, d. h. die Entwicklung neuer Wachstumsstufen vor sich geht (vgl. Figg. 3a—3d und Photogramm 4, 5 und 6).

Fig. 3a. Der Durchbruch eines neuen Büschels durch das um A vorhandene auf dem Radius AB beginnt mit besonders dichter An- und Nebeneinanderlagerung von Leuchtfäden am Orte A oder auch etwas davon entfernt bei B_0 ; bei B erscheint ein kurzer Lichtpinsel.



Fig. 3a.

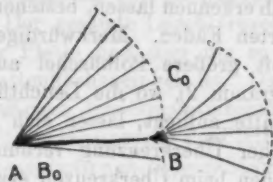


Fig. 3b.

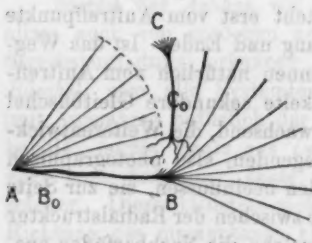


Fig. 3c.

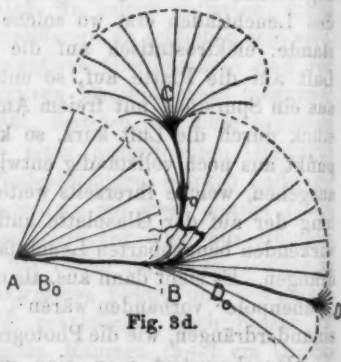


Fig. 3d.

Fig. 3b. AB wird zum Ladungskanale (Funkenstücke), das Büschel aus B wächst zu voller Länge, vgl. Phot. 4 rechts; hierbei dreht sich die Feldrichtung am Orte C_0 aus der ursprünglichen, zu A radialen Richtung in die Tangente zum Büschel um A ; hierbei findet bei C_0 Zusammendrängen oder auch Überschneiden von Leuchtfäden statt; vgl. Phot. 4 links oben.

Fig. 3c. An der Verdichtungsstelle C_0 entsteht ein Funkenstück; dieses bildet zunächst nach C zu ein kurzes, meist homogen geschwärztes, negatives Büschel, nach B zu ein positives. Photogramm 6 zeigt ein Büschel in diesem besonders auffallenden Entwicklungszustande, ebenso Phot. 5 rechts.

Fig. 3d. Das getrennte Funkenstück bei C_0 hat durch sein positives Büschelende hierdurch den Rückanschluß an den seit Fig. 3b fertigen Ladungskanal AB gewonnen; sein kurzes, homogenes, negatives Büschelende bei C wächst nun rasch zur normalen Größe eines Zwischenbüschels aus. Gleichzeitig oder auch vorher beginnt vielleicht schon in Richtung $B D_0 D$ die Bildung eines weiteren Durchbruches.

Beim Polbüschel beginnt der Durchbruch fast immer *dicht* am Pole. Das sonst *häufig* zu beobachtende Auftreten eines vom übrigen Ladungskanale zunächst *getrennten* Funkenstückes (wie in Phot. 6) bleibt auch auf fertigen Ladungswegen oft kenntlich an dem kurzen, *homogen* geschwärzten negativen Büschel oder, freilich seltener, an dem positiven Büschel mit seinen die regelmäßige Struktur der vorher gebildeten Nachbarstromfäden ganz *unregelmäßig überkreuzenden* spärlichen Fäden, vgl. Phot. 4 und 5 auf den Mittelstücken des Hauptladungsweges.

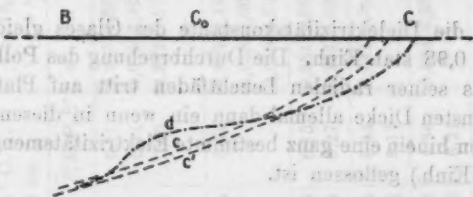


Fig. 4. V. Größe der Potentialverläufe.

Die Bildung eines *positiven* Büschels von C_0 nach B zu wird ohne weiteres verständlich, wenn man bedenkt, daß ein Funkenstück ein relativ zu den Leuchtfäden guter Leiter ist. Der *Potentialverlauf* auf der Platte von B über C_0 nach C hin (vgl. Fig. 4) der *vor* Bildung des Funkenstückes für *alle* Strombahnen in diesem Bereiche etwa den Verlauf der Kurve c besaß, verliert im Funkenkanale sein Gefälle fast völlig. Er nimmt in ihm etwa die Kurvenwerte d an, wobei dann (links von C_0 in Fig. 4) die Werte des Potentials am positiven Funkenstückende *über* den der Nachbarfäden, auf denen jetzt der Verlauf gleich c' ist, steigen können, und daher dann nach diesen hin ein *positives* Büschel mit sie *überkreuzenden* Fäden entstehen kann.

Es genügt nach allem im wesentlichen die Annahme, daß zwei Strömungsarten auftreten, Leuchtfäden und Funken, erstere mit steigender, letztere mit fallender Charakteristik, zur Erklärung des gesamten Gleitphänomens. Der innere ionentheoretische Grund des jeden Durchbruch einleitenden *Überganges* eines Leuchtfadenstückes in ein Funkenstück ist noch unbekannt. Vielleicht gibt nachstehende Erwägung einmal einen Anhalt zu weiterer Aufklärung. Für einen radialen Leuchtfaden des Polbüschels gilt: Unabhängig von der Dicke der Glasplatte beträgt seine Breite etwa 0,02 cm, ist das Gefälle auf ihm 11,5 KV./cm. Im Augenblicke des Durchbruches hat er die Länge l_0 erreicht. Also ist in ihn *am Pole* bis zu diesem Augenblicke eine Elektrizitätsmenge E_0 hineingeflossen, die sich unter Berücksichtigung von Gleichung (3) für l_0 rechnet zu

$$(8) \quad E_0 = 0,02 \cdot \frac{11,5}{2} \cdot 4,22^2 \frac{k}{4\pi};$$

setzt man die Dielektrizitätskonstante des Glases gleich 6, so wird $E_0 = 0,98$ stat. Einh. Die Durchbrechung des Polbüschels längs eines seiner radialen Leuchtfäden tritt auf Platten der verschiedensten Dicke allemal dann ein, wenn in diesen Durchbruchsfaden hinein eine ganz bestimmte Elektrizitätsmenge (etwa eine stat. Einh.) geflossen ist.

V. Größe der Polbüschel positiver Gleitfiguren.

Durch einfache Polumkehr erhält man mit der in Abschnitt I geschilderten Versuchsanordnung *positive* Gleitspuren.

Auch hier tritt bei kleinen Spannungen zunächst ein kreisförmiger Büschel radialer Struktur, ein „Polbüschel“ auf, bei höherer angelegter Spannung erscheint dies wieder plötzlich durchbrochen von dem eigentlichen Gleitprozesse. Die Spur des letzteren zeigt jedoch im starken Gegensatze zur negativen *keinen* Zerfall in *regelmäßige* Wachstumsstufen. Für eine Messung geeignet sind also nur die Größen R , allenfalls l_0 , ferner L und f .

Beim Polbüschel bemerkt man außer den radialen Leuchtfäden bzw. Fadenbündeln meist noch eigentümliche kometenartige Gebilde oder auch isoliert liegende Sternchen *außerhalb*

der Hauptspur. Diese geben (wie die Nebenseitenpole der negativen Polbüschel) die Auftreffspur von Leuchtfäden, welche zunächst vom Pole aus *nicht* auf der Platte auflagen, sondern erst außerhalb der Hauptspur auf die Platte herabgezogen wurden und nur in diesem ihrem letzten, auf der Platte eng aufliegenden Teile photographisch wirkten.¹⁾ In den nachstehenden Tabellen sind demnach *zwei* Werte für die radiale Ausdehnung der positiven Polbüschel angegeben:

R größter Radius *lückenloser* Radialfadenspuren (vermindert um 0,1 cm wegen der Polstabdicke) und

R^* Abstand des *fernsten* Sternchens vom Zentrum (vermindert gleichfalls um 0,1 cm); R^* gibt also zugleich die *größte* überhaupt vom Pole ausgehende Leuchtfadenlänge.

In den Tabellen sind auch die Werte von P/R^* (oder wo R^* nicht vorhanden von P/R) eingetragen, es gilt

$$(1b) \quad P = 6,0 R^*,$$

d. h. die größte Fadenlänge ist proportional der Spannung unabhängig von der Plattendicke; sollte nach Analogie mit dem negativen Polbüschel (Gleichungen 1a) eine additive Konstante neben P vorhanden sein, so ist sie jedenfalls klein.

Dresden, Physik. Inst. d. Techn. Hochschule, 16. Juni 1917.

1) Der Nachweis, daß diese Kometen und Sternchen tatsächlich wie angegeben entstehen, ist auch hier leicht durch Vergleich mit Aufnahmen, bei denen der Polstab oberhalb der photographischen Schicht frei in der Luft endigte, zu geben.

(Eingegangen 19. Juni 1917.)

4. *Drei optisch-meteorologische Beobachtungen; von H. Dember und M. Uibe.*

(Abdruck aus den Berichten der Mathemat.-Physik. Klasse der Königl. Sachs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Bd. 68, 28. Febr. 1916.)

Anhang zum zweiten Bericht über die auf Teneriffa ausgeführten Arbeiten.

§ 1.

Am 21. August 1914 sahen wir auf dem Pik von Teneriffa (in 3280 m Höhe) um 11 Uhr vormittags einen sehr hellen, vollständig ausgebildeten Halo, konzentrisch zur Sonne. Der Himmel war mit hohen leichten Cirruswolken bedeckt, durch welche die Sonne noch blendend hindurchschien. Die Farbe des Raumes zwischen Sonne und Ring haben wir im Beobachtungsbuch mit „dunkel grau-blau“ bezeichnet. Der sich an diesen Raum anschließende Ring war innen, der Sonne zugekehrt, von einem schmalen, rötlich braunen Saum begrenzt, dann folgte ein gelblicher Zwischenton, dem sich nach außen der bläulich-weiße helle Ring anschloß. Die Farbe der weiteren Umgebung kann wieder mit dunkel grau-blau gekennzeichnet werden und sie lief schließlich in das Grau des Cirrusnebels über.

Mit Hilfe des Wienerschen Photometers¹⁾, das mit Höhenkreis versehen ist, konnte unter Benutzung der Aufhellung im Gesichtsfelde des Instrumentes eine Messung des Ringdurchmessers vorgenommen werden. Es ergab sich 36° am weißen, d. h. äußeren Rande. Die Meßunsicherheit beträgt $\pm 1^\circ$. Die Ringbreite schätzen wir auf etwa $\frac{3}{4}$ Sonnendurchmesser.

Um 11 Uhr 30 begann der Ring schwächer zu werden, verschwand erst streckenweise und um 11 Uhr 40 vollständig.

Am gleichen Tage, um 2 Uhr 20 nachmittags, erblickten wir einen zweiten, bedeutend größeren, ebenfalls um die Sonne konzentrischen Ring, an dem wir aber keine Spektralfarben

1) Vgl. F. Herrheimer, Zeitschr. f. Instrumentenkunde, Febr. 1912.

wahrnehmen konnten. Es war ein helles, auch etwa $\frac{3}{4}$ Sonnendurchmesser breites, weißes Band mit einem Durchmesser von $60^\circ \pm 1^\circ$. Dieser Ring fing um 2 Uhr 28 an sich aufzulösen, und verschwand dann schnell.

Die Cirruswolken standen in beiden Fällen in einer Höhe, die mit ziemlicher Sicherheit annehmen läßt, daß sie von festen Eiskristallen gebildet wurden und daß durch Brechung in diesen die Halos entstanden sind. Für die große Höhe der Wolken spricht auch der Umstand, daß unter den Wolken, welche den 36° -Ring trugen, deutlich erkennbar andere sehr feine Cirren hinzogen, auf denen der Ring nicht zu sehen war.

Nach der bei Pernter-Exner¹⁾ nach Bravais und Galle dargestellten Theorie der Halos entsprechen den hier beobachteten Durchmessern von 36 und 60° Eisprismen mit brechenden Winkeln, wie sie die kleine nachstehende Tabelle zeigt.

Brechender Winkel	Theoret. Halodurchmesser	Gefundener Durchmesser
$50^\circ 28'$	$34^\circ 52'$	$36^\circ \pm 1^\circ$
$53^\circ 50'$	$37^\circ 52'$	
$73^\circ 13'$	$59^\circ 4'$	$60^\circ \pm 1^\circ$
$76^\circ 50'$	$64^\circ 20'$	

Die beiden Halos gehören also zu denjenigen, die sich mit Hilfe der Brechung des Lichtes in Eiskristallen gut erklären lassen.²⁾

Ein Nebensonnenkreis (zirkumzenitaler Bogen) war in beiden Fällen nicht zu sehen und ist auch auf einer photographischen Aufnahme des 36° -Halos nicht erkennbar.

§ 2.

Eine farbenprächtigere Erscheinung als die Halos sahen wir auf dem Gipfel des Piks am 30. August 1914. Die Sonne stand, kurz vor Untergang, nur wenige Grade über dem Horizont. Der dunkle Pikschatten war über den Canadaswall,

1) J. M. Pernter u. Fel. Exner, Meteorologische Optik, Wien und Leipzig 1910.

2) Die geringe, uns hier über den Gegenstand zur Verfügung stehende Literatur gestattet uns nicht, anzugeben, ob schon von anderen Beobachtern Halos gleicher Dimensionen gesehen worden sind.

welcher den Berg im Osten umgibt, gestiegen, und der Schatten der Bergspitze fiel auf das Wolkenmeer, das von der Passatwolke gebildet wurde. Um die Spitze des Bergschattens war in einer Ausdehnung von wenigen Graden ein Farbenbogen von elliptischer Gestalt zu sehen, so wie ihn die Skizze zeigt.



Der Farbenbogen¹⁾ bestand aus drei reinen und leuchtenden Farben: Außen rot, in der Mitte grün und innen blau. Während der nur einige Minuten betragenden Beobachtungszeit behielt der Bogen die Gestalt der wenig flachen Ellipse bei und eine Änderung der Durchmesser derselben war nicht erkennbar.

Die Luft auf dem Pik war vollständig rein, ohne jede Spur von Nebelbildung. Die relative Feuchtigkeit kann nur gering gewesen sein, denn auf dem Zeltplatz (440 m unter der Pikspitze) betrug sie zwei Stunden vor Sonnenuntergang 22 Proz. und zwei Stunden nachher 32 Proz.

Die geringe Feuchtigkeit und die Abwesenheit vom Nebel am Standort spricht gegen die Fraunhofersche Forderung²⁾, daß zur Entstehung derartiger Farbenbögen auf Tropfennebeln eine primäre Beugung und dadurch Zerlegung des weißen Lichtes an den Wassertropfchen über dem Beobachter stattfinden müsse. Auch Pernter³⁾ beschreibt die Erscheinung eines Farbenbogens auf einem wagerechten Nebelboden, wobei er selbst in nebelfreier Luft stand. Die oberste Grenze des Wolkenmeeres bei unserer Beobachtung liegt etwa 1800 m hoch und war vom Beobachtungsort 15 km entfernt. Die

1) Entsprechend den Benennungen „Brocken- und Ballongespenst“ kann man für die hier gesehene Erscheinung das Wort „Pikgespenst“ bilden.

2) J. v. Fraunhofer, „Über die Entstehung der Hölle usw.“ Gesammelte Schriften p. 209.

3) J. M. Pernter u. Fel. Exner, l. c. p. 209.

Wolke bestand nur aus Wassertröpfchen; sie enthält um diese Jahreszeit keine Eiskristalle, wovon wir uns bei mehrmaligem Durchwandern der Schicht am anderen Tage überzeugt haben. Die primäre spektrale Zerlegung muß daher an den Nebeltröpfchen in der obersten Schicht des Wolkenmeeres stattgefunden haben, so wie es auch die von Richarz¹⁾ für das „Ballongespent“ und „Dolomitengespent“ gegebene Theorie verlangt.

Die beobachtete Unveränderlichkeit der Bogendurchmesser läßt auf eine Konstanz der Größe der beugenden Nebeltröpfchen und der Glanz der Erscheinung auf eine einheitliche Größe derselben schließen.

Physikal. Inst. der Techn. Hochschule Dresden und der Universität Leipzig. Güimar auf Teneriffa, 27. Nov. 1915.

1) F. Richarz, *Deutsche Rundschau für Geographie* 36. 1913/14; *Meteorolog. Zeitschr.* p. 23. 1906; Heft 6. 1912.

(Eingegangen 27. Juni 1917.)

**5. Bemerkung zu einer Arbeit von Adolf Böhi
über ein Verfahren zur Messung der absoluten
Potentialdifferenzen, welche beim Kontakt
beliebiger Leiter auftreten;
von G. Borelius.**

An Ende des vorigen Jahres wurde in diesen Annalen¹⁾ eine elektrostatische Methode beschrieben, die angeblich zur Messung absoluter Elektrodenpotentiale dienen sollte. Es ist dies, soweit mir bekannt ist, der dritte Versuch, Elektrodenpotentiale elektrostatisch zu messen, der in einem kleinen Zeitraum veröffentlicht wird.

Die erste Methode wurde von mir²⁾ angegeben. Ich habe zwar nie behauptet, absolute Elektrodenpotentiale messen zu können, sondern nur ihre Variationen. Aber auch dabei hatte ich auf die Variationen der Grenzpotentiale zwischen Leitern und Isolatoren nicht die nötige Rücksicht genommen und kam aus diesem Grunde zu fehlerhaften Resultaten. Später wurde ich dies gewahr und habe mit meiner Methode eben die genannten Grenzflächen näher studiert.³⁾

Die nächste Arbeit dieser Art wurde von A. Ewell⁴⁾ gemacht. Er meinte, so wie jetzt Böhi, absolute Elektrodenpotentiale gemessen zu haben. Ewell war aber, wie von J. Barnett⁵⁾ sowie von mir⁶⁾ nachgewiesen wurde, nur durch eine völlige Vernachlässigung der Grenzpotentiale gegenüber den Isolatoren zu diesem Resultate gekommen. Ich meine jetzt denselben Fehler in dem Gedankengang von Böhi nachweisen zu können.

1) A. Böhi, Ann. d. Phys. 51. p. 643. 1916.

2) G. Borelius, Ann. d. Phys. 42. p. 1129. 1913.

3) G. Borelius, Ann. d. Phys. 45. p. 929. 1914 u. 50. p. 447. 1916.

4) A. Ewell, Phys. Review 6. p. 271. 1915.

5) J. Barnett, Phys. Review 7. p. 331. 1916.

6) G. Borelius, Phys. Review 8. p. 123. 1916.

Die Methode von Böhi ist die des zerlegbaren Kondensators. Wir können das Wesentlichste seiner Anordnung kurz folgendermaßen wiedergeben. Ein trichterförmiges Gefäß enthält z. B. verdünnte Schwefelsäure, die durch eine Zinkelektrode über eine Kompensationsanordnung mit der Erde verbunden ist. Über die Oberfläche der Säure ist eine Gummimembran gespannt, und darüber hängt eine Zinkscheibe, die, zur Entfernung aller Feuchtigkeit, in Öl gekocht ist und dann mit einer dünnen Schicht von z. B. festem Paraffin überzogen ist. Die Scheibe kann durch eine Wippe entweder mit der Erde oder mit einem Elektrometer verbunden werden. Die Messung geschieht in der folgenden Weise. Während die Zinkscheibe geerdet ist, wird dem Kompensationspotential ein solcher Wert P gegeben, daß, wenn die Scheibe darauf erst mit dem Elektrometer verbunden und dann von der Säuroberfläche entfernt wird, kein Ausschlag am Elektrometer entsteht. Böhi meint jetzt, daß P das Elektrodenpotential $\text{Zn}/\text{H}_2\text{SO}_4$ angibt.

Daß am Elektrometer kein Ausschlag auftritt, sagt nun aber aus, daß im Dielektrikum zwischen Säure und Scheibe kein elektrisches Feld besteht, und wir bekommen mit einer leicht verständlichen Bezeichnungsweise, wenn wir, von der Erde gerechnet, die Summen der Potentialsprünge zu beiden Seiten dieses Dielektrikums gleichsetzen und der Einfachheit halber die Potentialsprünge der metallischen Kontakte vernachlässigen,

$$P + \text{H}_2\text{SO}_4/\text{Zn} + \text{Luft}/\text{H}_2\text{SO}_4 = \text{Paraffin}/\text{Zn} + \text{Luft}/\text{Paraffin}.$$

Der letzte Potentialsprung kann vielleicht vernachlässigt werden. Die übrigen aber sicher nicht. Hierzu kommt noch, daß die Gummimembran wahrscheinlich einen störenden Einfluß auf die Messungen haben muß.

Die Methode von Böhi gibt somit ebensowenig wie irgendeine andere elektrostatische Methode unmittelbar Aufschluß über die Größe der absoluten Elektrodenpotentiale.

Lund, Juni 1917.

(Eingegangen 6. Juli 1917.)

6. Zur Theorie des Rotationsspektrums; von Max Planck.

(Zweite Mitteilung.)

Der Plan der folgenden Untersuchungen über das vorstehende Thema ist der, festzustellen, welche Folgerungen man aus den vorliegenden Messungen des Rotationsspektrums zu ziehen hat, falls für den Vorgang der Absorption die Gesetze der klassischen Elektrodynamik als zutreffend angenommen werden.

In meiner ersten Mitteilung¹⁾ hatte ich die Drehungsachsen der rotierenden Dipole als fest angenommen. Hier sollen nur die entsprechenden Resultate für Rotatoren mit freien Drehungsachsen abgeleitet und, soweit das zurzeit möglich erscheint, mit den Ergebnissen der Messungen verglichen werden.

§ 1.

Wir denken uns wieder, wie in der ersten Mitteilung, eine große Schar N von unregelmäßig im Raume angeordneten gleichbeschaffenen starren elektrischen Dipolen, deren jeder, unabhängig von den übrigen, um seinen Schwerpunkt vollkommen frei drehbar ist. Alle Dipole sind einer elektromagnetischen Strahlung ausgesetzt, die unpolarisiert und an allen Stellen des Raumes gleich beschaffen sein möge, im makroskopischen Sinne, d. h. die überall die nämliche Intensität, die nämliche spektrale Verteilung und die nämliche Richtung besitzt. Gesucht ist wiederum derjenige Teilbetrag der gesamten innerhalb eines bestimmten schmalen Spektralbezirktes auffallenden Strahlung, welcher innerhalb einer bestimmten Zeit von den N Rotatoren absorbiert, d. h. in mechanische Rotationsenergie verwandelt wird.

Es versteht sich, daß die so gestellte Frage nur dann eine bestimmte Antwort zuläßt, wenn der Zustand der Rota-

1) M. Planck, Ann. d. Phys. 52. p. 491. 1917.

toren, d. h. ihre Drehungsgeschwindigkeiten und die Richtungen der augenblicklichen Drehungsachsen, zu Anfang der Bestrahlung bekannt sind. Wir wollen daher annehmen, daß die Zahl derjenigen Rotatoren, deren Drehungsgeschwindigkeiten zur Zeit $t = 0$ zwischen ω und $\omega + d\omega$ liegen, gegeben und gleich ist $NW(\omega) d\omega$, wobei

$$(1) \quad \int_0^{\infty} W(\omega) d\omega = 1,$$

und ferner, daß zur selben Zeit $t = 0$ alle räumlichen Richtungen der augenblicklichen Drehungsachsen gleich zahlreich vorkommen.

§ 2.

Wir wählen zur Betrachtung zunächst einen bestimmten Dipol aus und stellen die Gleichungen seiner Bewegung auf. Nennen wir, wie üblich, die beiden Winkelkoordinaten, welche die räumliche Richtung der Symmetrieachse (vom negativen zum positiven Pol gerechnet) bestimmen, θ und φ , ferner das Trägheitsmoment J , so ist die kinetische Energie der Drehung:

$$(2) \quad u = \frac{J}{2} \omega^2 = \frac{J}{2} (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2)$$

und die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen lauten:

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial u}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial u}{\partial \theta} = \Theta, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial u}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial u}{\partial \varphi} = \Phi, \end{cases}$$

wobei Θ und Φ die den Winkeln θ und φ entsprechenden Kräftekomponenten bedeuten. Dieselben ergeben sich aus dem elektrischen Moment E des Dipols und den lokalen Komponenten der elektrischen Feldstärke \mathfrak{E} folgendermaßen:

$$(4) \quad \begin{cases} \Theta = E (\mathfrak{E}_x \cos \theta \cos \varphi + \mathfrak{E}_y \cos \theta \sin \varphi - \mathfrak{E}_z \sin \theta), \\ \Phi = E \cdot (-\mathfrak{E}_x \sin \varphi + \mathfrak{E}_y \cos \varphi) \sin \theta, \end{cases}$$

so daß die Bewegungsgleichungen (3) vollständig lauten:

$$(5) \quad \begin{cases} J \ddot{\theta} - J \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 = E (\mathfrak{E}_x \cos \theta \cos \varphi + \mathfrak{E}_y \cos \theta \sin \varphi - \mathfrak{E}_z \sin \theta), \\ J \sin \theta \ddot{\varphi} + 2 J \cos \theta \dot{\theta} \dot{\varphi} = E \cdot (-\mathfrak{E}_x \sin \varphi + \mathfrak{E}_y \cos \varphi). \end{cases}$$

Nun sei für die Zeit $t = 0$

$$(6) \quad \vartheta = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi = 0, \quad \dot{\vartheta} = 0, \quad \dot{\varphi} = \omega_0,$$

was keine Beschränkung der Allgemeinheit bedeutet, und für eine beliebige andere Zeit

$$(7) \quad \vartheta = \frac{\pi}{2} + \eta, \quad \varphi = \omega_0 t + \sigma, \quad \dot{\vartheta} = \dot{\eta}, \quad \dot{\varphi} = \omega_0 + \dot{\sigma},$$

so daß für $t = 0$

$$(8) \quad \eta = 0, \quad \sigma = 0, \quad \dot{\eta} = 0, \quad \dot{\sigma} = 0.$$

Wir beschränken die Betrachtung auf solche Zeiten t , die zwischen 0 und τ gelegen sind, und nehmen den Zeitabschnitt τ so groß, daß während desselben der Rotator viele Umdrehungen ausführt, d. h.

$$(9) \quad \omega \tau \gg 1,$$

aber doch andererseits so klein, daß

$$(10) \quad \eta, \ll 1 \quad \text{und} \quad \sigma, \ll 1.$$

Dann berechnen sich die Werte von η und σ in erster Annäherung aus folgenden Gleichungen, welche aus (5) und (7) hervorgehen, wenn man darin die kleinen Glieder höherer Ordnung vernachlässigt:

$$(11) \quad J \ddot{\eta} + J \omega_0^2 \eta = -E \mathfrak{E}_z,$$

$$(12) \quad J \ddot{\sigma} = E \cdot (-\mathfrak{E}_x \sin \omega_0 t + \mathfrak{E}_y \cos \omega_0 t).$$

Die erste Gleichung ist identisch mit der eines in der Richtung der z -Achse schwingenden elektrischen Oszillators von der Eigenfrequenz ω_0 ; die zweite Gleichung ist identisch mit der eines um die z -Achse rotierenden elektrischen Dipols. Von beiden Gleichungen lassen sich die Lösungen direkt angeben.

§ 3.

Die von dem Rotator in der Zeit zwischen $t = 0$ und $t = \tau$ aus der auffallenden Strahlung aufgenommene Energie ist

$$u_1 - u_0 = \Delta u = \int_0^\tau (\Theta \dot{\vartheta} + \Phi \dot{\varphi}) dt$$

und nach (4) und (7) bis auf Glieder kleinerer Größenordnung:

$$(13) \quad \Delta u = \Delta_1 u + \Delta_2 u,$$

wobei gesetzt ist:

$$(14) \quad \Delta_1 u = -E \int_0^{\tau} \mathfrak{E}_z \eta \, dt,$$

$$(15) \quad \Delta_2 u = E \int_0^{\tau} \{-\mathfrak{E}_x \sin(\omega_0 t + \sigma) + \mathfrak{E}_y \cos(\omega_0 t + \sigma)\} (\omega_0 + \vartheta) \, dt.$$

Wir wollen nun den Mittelwert von Δu bilden für alle diejenigen Rotatoren, welche zur Zeit $t = 0$ die nämliche Drehungsgeschwindigkeit ω_0 besitzen:

$$(16) \quad \overline{\Delta u} = \overline{\Delta_1 u} + \overline{\Delta_2 u}.$$

Das erste Glied $\overline{\Delta_1 u}$, die von einem in der Richtung der z -Achse schwingenden Oszillator mit der Eigenfrequenz ω_0 im Mittel absorbierte Energie, ergibt sich aus einer Rechnung, die sich in meinen Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung (zweite Auflage) ausführlich mitgeteilt findet: dasselbe ist nämlich, wie die Gleichungen (14) und (11) zeigen, identisch mit dem dortigen¹⁾ Ausdruck (241 a), wenn man darin statt der Konstanten L den Wert J/E^2 setzt. Daher erhalten wir mit Rücksicht auf die dort ausgeführten Reduktionen:

$$(17) \quad \overline{\Delta_1 u} = \frac{E^2}{J} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{C_n^2}}{\omega_0^2 - \omega_n^2} \cdot \frac{\omega_0}{\omega_0 - \omega_n} \cdot \sin^2 \frac{\omega_0 - \omega_n}{2} \tau,$$

wo C_n und ω_n die in der Fourierschen Reihe für die elektrische Feldstärke

$$(18) \quad \mathfrak{E}_z = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(\omega_n t + \vartheta_n)$$

auftretenden Amplituden und Frequenzen bedeuten.

Da wegen (9) nur solche Werte von ω_n für den Ausdruck (17) merklich in Betracht kommen, welche nahe gleich ω_0 sind, so kann man einfacher schreiben:

$$\overline{\Delta_1 u} = \frac{E^2}{2J} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{C_n^2}}{(\omega_n - \omega_0)^2} \sin^2 \frac{\omega_n - \omega_0}{2} \tau,$$

oder, wenn gesetzt wird:

$$(18a) \quad (\omega_n - \omega_0) \tau = \xi,$$

1) l. c. p. 152.

$$(19) \quad \overline{A_1 u} = \frac{E^2 \tau^2}{2J} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{C_n^2}}{\xi^2} \sin^2 \frac{\xi}{2}.$$

Andererseits ergibt sich $\overline{A_2 u}$, die von einem um die z -Achse mit der anfänglichen Winkelgeschwindigkeit ω_0 rotierenden Dipol im Mittel absorbierte Energie, direkt aus der Gleichung (20) meiner ersten Mitteilung¹⁾ als:

$$(20) \quad \overline{A_2 u} = \frac{E^2 \tau^2}{4J} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{C_n^2}}{\xi^2} \left\{ \frac{\omega_0 \tau}{\xi} (2 - 2 \cos \xi - \xi \sin \xi) + 1 - \cos \xi \right\},$$

und daraus folgt nach (16) für die von allen mit der anfänglichen Winkelgeschwindigkeit ω_0 rotierenden Dipolen in der Zeit τ aus der auffallenden Strahlung im Mittel aufgenommene Energie:

$$(21) \quad \overline{A u} = \frac{E^2 \tau^2}{4J} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{C_n^2}}{\xi^2} \left\{ \frac{\omega_0 \tau}{\xi} (2 - 2 \cos \xi - \xi \sin \xi) + 2 - 2 \cos \xi \right\}.$$

§ 4.

Die gesamte von allen N Rotatoren aus der auffallenden Strahlung in der Zeit τ absorbierte Energie A ergibt sich nach (1) durch Multiplikation von (21) mit $NW(\omega_0) d\omega_0$ und Integration über ω_0 , also:

$$A = N \int_0^{\infty} \overline{A u} W(\omega_0) d\omega_0,$$

und daraus folgt nach Ausführung der Integration, ganz auf dem in meiner ersten Mitteilung beschriebenen Wege:

$$A = \frac{\pi N E^2 \tau}{4J} \sum_{n=0}^{\infty} \overline{C_n^2} \left\{ W(\omega_n) - \omega_n \frac{dW(\omega_n)}{d\omega_n} \right\},$$

oder:

$$(22) \quad A = - \frac{\pi N E^2 \tau}{4J} \sum_{n=0}^{\infty} \overline{C_n^2} \omega_n^2 \frac{d}{d\omega_n} \left(\frac{W(\omega_n)}{\omega_n} \right),$$

welcher Ausdruck sich von dem früher erhaltenen, für Rotatoren mit festen Drehungsachsen gültigen nur dadurch unterscheidet, daß dort das ω_n im Nenner von $W(\omega_n)$ fehlt und

1) l. c. p. 500.

dafür ω_n statt ω_n^2 im Zähler steht. Dieser Unterschied führt zu charakteristischen Folgerungen für den hier behandelten Fall freier Drehungsachsen, die nun entwickelt werden sollen. Der Gang der Betrachtung kann dabei ganz dem früher eingeschlagenen angepaßt und daher in etwas abgekürzter Form dargestellt werden.

Wenn die auffallende unpolarisierte Strahlung in einer ebenen elektromagnetischen Welle besteht, welche pro Zeit- und Flächeneinheit innerhalb des Spektralbezirkes zwischen ω und $\omega + d\omega$ die Energie $E_\omega d\omega$ durch eine feste, den Wellenebenen parallele Ebene hindurchsendet, so ist nach (22) die gesamte Energie, welche von allen N Rotatoren innerhalb des Spektralgebietes $(\omega, d\omega)$ in der Zeit τ absorbiert wird:

$$(23) \quad A = - \frac{2\pi^2 N E^2 \tau}{3 c J} \omega^2 \frac{d}{d\omega} \left(\frac{W(\omega)}{\omega} \right) E_\omega d\omega.$$

Hieraus ergibt sich der Absorptionskoeffizient α_ω eines Gases, welches im Volumen V N rotierende Dipole enthält, d. h. derjenige Bruchteil, um welchen die Intensität einer in einer bestimmten Richtung fortschreitenden Strahlung von der Frequenz ω auf der Strecke 1 geschwächt wird:

$$(24) \quad \alpha_\omega = - \frac{2\pi^2 E^2}{3 c J} \cdot \frac{N}{V} \cdot \omega^2 \frac{d}{d\omega} \left(\frac{W(\omega)}{\omega} \right).$$

Die Absorption ist also proportional nicht etwa der Verteilungsdichte $W(\omega)$ der Rotatoren, sondern der Abnahme des Quotienten $W(\omega)/\omega$ mit wachsender Drehungsgeschwindigkeit ω . Wenn also in einem Spektralgebiete die auffallende Strahlung überhaupt nicht absorbiert wird, wie in dem Zwischengebiete zwischen zwei benachbarten Linien ω_n und ω_{n+1} des Absorptionsspektrums, wobei

$$(25) \quad \omega_n = \frac{n h}{2\pi J},$$

so ist in diesem Gebiete die Verteilungsdichte $W(\omega)$ nicht etwa gleich Null, sondern proportional ω , während sie bei festen Drehungsachsen nach dem früher erhaltenen Resultat unabhängig ist von ω .

§ 5.

Die Frage nach der Verteilungsdichte $W(\omega)$ läßt sich auch vom rein theoretischen Standpunkte aus behandeln, und zwar auf zwei verschiedenen, voneinander unabhängigen

Wegen, und beide Wege führen bemerkenswerterweise übereinstimmend gerade zu demjenigen Resultat, welches hier aus der tatsächlichen Struktur des Rotationsspektrums abgeleitet wurde.

Der erste Weg ist rein statistischer Art. Er geht aus von der Hypothese¹⁾, daß ein jedes Elementargebiet des Gibbsschen Phasenraumes von den Phasenpunkten, welche die Zustände der einzelnen Molekeln repräsentieren, *gleichmäßig* erfüllt wird. Nennen wir also ein Volumelement des Elementargebiets dG , so ist:

$$(26) \quad W(\omega) d\omega = \text{const.} \int_{\omega}^{\omega + d\omega} dG.$$

Die Integration ist über alle Phasenpunkte zu erstrecken, die in dem von den Hyperflächen $\omega = \text{const.}$ und $\omega + d\omega = \text{const.}$ begrenzten Raume liegen.

Nun ist

$$dG = d\vartheta \cdot d\varphi \cdot dp_{\vartheta} \cdot dp_{\varphi},$$

wobei nach (2) die Impulse

$$p_{\vartheta} = J\dot{\vartheta}, \quad p_{\varphi} = J \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}$$

und

$$(27) \quad \omega^2 = \frac{p_{\vartheta}^2}{J^2} + \frac{p_{\varphi}^2}{J^2 \sin^2 \vartheta}.$$

Führt man also in dem vierfachen Integral (26) neben ϑ und φ statt p_{ϑ} und p_{φ} als Integrationsvariable die Drehungsgeschwindigkeit ω und den Winkel ψ ein, durch die Beziehungen:

$$(28) \quad p_{\vartheta} = J\omega \cos \psi \quad \text{und} \quad p_{\varphi} = J\omega \sin \vartheta \sin \psi,$$

so lautet die Gleichung (26):

$$(29) \quad W(\omega) d\omega = \text{const.} \iiint d\vartheta d\varphi d\omega d\psi \cdot D,$$

wobei

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial p_{\vartheta}}{\partial \omega} & \frac{\partial p_{\vartheta}}{\partial \psi} \\ \frac{\partial p_{\varphi}}{\partial \omega} & \frac{\partial p_{\varphi}}{\partial \psi} \end{vmatrix} = J^2 \omega \sin \vartheta.$$

Da die Integration über ϑ von 0 bis π , über φ und ψ von 0 bis 2π , und über ω von ω bis $\omega + d\omega$ zu erstrecken ist, so erhellt in der Tat, daß $W(\omega)$ proportional ω ist.

1) Theorie der Wärmestrahlung, § 138, p. 137. Verh. d. D. Physik. Ges. 17. p. 411. 1915.

§ 6.

Der zweite Weg zur theoretischen Bestimmung von $W(\omega)$ ist ein elektrodynamischer. Auf ihm ergibt sich die Verteilungsdichte dadurch, daß man $W(\omega)$ gleichsetzt derjenigen Verteilungsdichte, welche sich unter den rotierenden Gasmolekeln durch die alleinige Einwirkung der schwarzen Strahlung bei der betreffenden Temperatur herstellt. Dabei wird ein bekannter, zuerst von Einstein angegebener, dann von Fokker verallgemeinerter Satz der statistischen Dynamik benutzt, in Verbindung mit der Hypothese, daß innerhalb eines Elementargebietes der Rotationsgeschwindigkeiten keine Ausstrahlung (Emission) von Energie, sondern nur Einstrahlung stattfindet. Der Einstein-Fokkersche Satz lautet in der Anwendung auf den vorliegenden Fall und mit der hier gebrauchten Bezeichnung¹⁾:

$$(30) \quad W(\omega) \cdot \overline{\Delta \omega} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \omega} \{ W(\omega) \cdot (\overline{\Delta \omega})^2 \} = 0,$$

gültig innerhalb des ganzen Elementargebietes der Rotationsgeschwindigkeiten zwischen ω_n und ω_{n+1} .

Zur Berechnung von $\overline{\Delta \omega}$ und $(\overline{\Delta \omega})^2$ können wir den oben abgeleiteten Wert von Δu benutzen. Um zunächst $\overline{\Delta u}$ zu erhalten, hat man in (21) zu setzen:

$$(31) \quad \overline{C_n^2} = \beta \cdot \mathfrak{R}_\omega d\omega,$$

wo \mathfrak{R}_ω die der Ordnungszahl n der Fourierschen Reihe (18) entsprechende spezifische Strahlungsintensität (Flächenhelle) der schwarzen Strahlung, β einen gewissen konstanten Zahlenfaktor bedeutet, auf dessen Wert es hier zunächst nicht weiter ankommt, und dann über ω von 0 bis ∞ zu integrieren. Also:

$$(32) \quad \overline{\Delta u} = \frac{\beta E^2 \tau^2}{4J} \cdot \int_0^\infty \frac{\mathfrak{R}_\omega d\omega}{\xi^2} \left\{ \frac{\omega_0 \tau}{\xi} (2 - 2 \cos \xi - \xi \sin \xi) + 2 - 2 \cos \xi \right\}.$$

Führt man als Integrationsvariable ξ statt ω ein, mittels der Beziehungen:

$$(33) \quad (\omega - \omega_0) \tau = \xi, \quad d\omega = \frac{d\xi}{\tau},$$

und, wegen (9),

$$(34) \quad \mathfrak{R}_\omega = \mathfrak{R}_{\omega_0} + \frac{\xi}{\tau} \left(\frac{d\mathfrak{R}}{d\omega} \right)_{\omega_0},$$

1) Vgl. M. Planck, Berl. Ber. vom 10. Mai 1917, p. 324, Gl. (11) und § 11.

so liefert die Ausführung der Integration:

$$(35) \quad \overline{\Delta u} = \frac{\beta E^2 \tau}{4J} \left\{ 2\pi \mathfrak{R}_{\omega_0} + \left(\frac{d\mathfrak{R}}{d\omega} \right)_{\omega_0} \omega_0 \pi \right\}.$$

Was ferner die Berechnung von $(\Delta u)^2$ betrifft, so genügt es hierfür, in der Gleichung (13) für Δu nur die Glieder der höchsten Größenordnung zu berücksichtigen. Dies ergibt:

$$(36) \quad \Delta u = \Delta_2 u = E \int_0^{\tau} (-\mathfrak{E}_x \sin \omega_0 t + \mathfrak{E}_y \cos \omega_0 t) \omega_0 dt,$$

wo für \mathfrak{E}_x und \mathfrak{E}_y Fouriersche Reihen nach Art von (18) zu setzen sind.

Führt man die Integration nach t aus, erhebt den Ausdruck von Δu ins Quadrat und bildet dann den Mittelwert für alle Rotatoren mit dem nämlichen ω_0 , so erhält man:

$$(\overline{\Delta u})^2 = E^2 \omega_0^2 \sum_{n=1}^{\infty} \overline{C_n^2} \frac{\sin^2 \frac{\omega_n - \omega_0}{2} \tau}{(\omega_n - \omega_0)^2},$$

oder nach (31), (33) und (34):

$$(37) \quad \begin{cases} (\overline{\Delta u})^2 = \beta E^2 \omega_0^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{\tau} \left\{ \mathfrak{R}_{\omega_0} + \frac{\xi}{\tau} \left(\frac{d\mathfrak{R}}{d\omega} \right)_0 \right\} \frac{\tau^2}{\xi^2} \sin^2 \frac{\xi}{2} \\ \quad = \frac{\pi}{2} \beta E^2 \omega_0^2 \tau \mathfrak{R}_{\omega_0}. \end{cases}$$

Um nun von Δu zu $\Delta \omega$ überzugehen, bedenken wir, daß nach (2):

$$\Delta u = J \omega_0 \Delta \omega + \frac{J}{2} (\Delta \omega)^2;$$

folglich nach (35):

$$\overline{\Delta u} = J \omega_0 \overline{\Delta \omega} + \frac{J}{2} (\overline{\Delta \omega})^2 = \frac{\pi \beta E^2 \tau}{4J} \left[2 \mathfrak{R}_{\omega_0} + \omega_0 \left(\frac{d\mathfrak{R}}{d\omega} \right)_0 \right]$$

und nach (37):

$$(\overline{\Delta u})^2 = J^2 \omega_0^2 (\overline{\Delta \omega})^2 = \frac{\pi}{2} \beta E^2 \omega_0^2 \tau \mathfrak{R}_{\omega_0}.$$

Dies ergibt:

$$(38) \quad \begin{cases} \overline{\Delta \omega} = \frac{\pi \beta E^2 \tau}{4J^2} \left[\mathfrak{R}_0 + \left(\frac{d\mathfrak{R}}{d\omega} \right)_0 \right], \\ (\overline{\Delta \omega})^2 = \frac{\pi \beta E^2 \tau}{2J^2} \mathfrak{R}_0 \end{cases}$$

und diese Ausdrücke, mit Weglassung des Index 0, in (30) eingesetzt, ergeben die folgende Differentialgleichung für $W(\omega)$:

$$\frac{W(\omega)}{\omega} - \frac{dW}{d\omega} = 0,$$

welche in der Tat wiederum zu der Folgerung führt, daß $W(\omega)$ proportional ω ist.

§ 7.

Von der Verteilungsdichte $W(\omega)$ im Innern eines Elementargebietes gehen wir jetzt über zur Betrachtung des Sprunges, den $W(\omega)$ bei

$$(39) \quad \omega = \omega_n = \frac{n h}{2 \pi J},$$

der Grenze der Elementargebiete $n-1$ und n , erleidet.

Integrieren wir nämlich die Gleichung (23) über ω von einem Werte, der sehr wenig kleiner ist als ω_n , bis zu einem Werte, der sehr wenig größer ist als ω_n , so erhalten wir die ganze in dem Spektralbezirke bei ω_n von den Rotatoren absorbierte Energie, welche ein Maß bildet für die Stärke der Absorptionslinie $\omega = \omega_n$:

$$(40) \quad A_n = \frac{2 \pi^2 N E^2 \tau}{3 c J} \cdot \omega_n (W_{n-1}(\omega_n) - W_n(\omega_n)) E_{\omega_n}.$$

Diese Gleichung ist völlig identisch mit der in meiner ersten Mitteilung durch (27) bezeichneten Gleichung für die Absorption von Rotatoren mit festen Drehungsachsen; sie liefert aber dennoch ganz andere Werte für die Absorption als jene, weil hier die Verteilungsdichte W eine andere ist. Während nämlich bei festen Drehungsachsen W innerhalb eines Elementargebietes unabhängig ist von ω , hat man, wie wir gesehen haben, bei freien Drehungsachsen $W_n(\omega)$ proportional ω anzunehmen. Der absolute Wert von $W_n(\omega)$ hängt natürlich von der Temperatur ab; man findet ihn nach allgemeinen thermodynamisch-statistischen Prinzipien¹⁾ aus der Gleichung für die „Verteilungszahl“

$$(41) \quad w_n = \int_{\omega_n}^{\omega_{n+1}} W_n(\omega) d\omega = \frac{p_n \cdot e^{-\frac{\bar{u}_n}{kT}}}{\sum_0^{\infty} p_n \cdot e^{-\frac{\bar{u}_n}{kT}}},$$

1) Verh. d. D. Physik. Ges. 17. p. 412. Gl. (18). 1915.

wobei in unserem Falle ¹⁾

$$(42) \quad p_n = 2n + 1 \quad \text{und} \quad \bar{u}_n = \frac{h^2}{8\pi^2 J} (n^2 + n + \frac{1}{2}).$$

Durch diese Bedingungen ist $W_n(\omega)$ vollkommen bestimmt, und zwar ist:

$$(43) \quad W_n(\omega) = \frac{8\pi^2 J^2}{h^2} \cdot \frac{\psi^{n^2+n}}{\sum_0^\infty (2n+1) \cdot \psi^{n^2+n}} \cdot \omega,$$

wo

$$(44) \quad \psi = e^{-\frac{h^2}{8\pi^2 J k T}},$$

und daraus ergibt sich nach (40):

$$(45) \quad A_n = \frac{4\pi^2 N E^2 \tau}{8 c J} \cdot E_{\omega n} \cdot \frac{n^2 \cdot \psi^{n^2-n} (1 - \psi^{2n})}{\sum_0^\infty (2n+1) \cdot \psi^{n^2+n}}.$$

Dieser Ausdruck unterscheidet sich in charakteristischer Weise von dem entsprechenden für den Fall fester Drehungsachsen gültigen, in meiner ersten Mitteilung mit (30) bezeichneten.

§ 8.

Wenn wir die spektrale Intensität der auffallenden Strahlung nicht auf Frequenzen ω , sondern, wie es in der Experimentalphysik üblich ist, auf Wellenlängen λ beziehen, so ist

$$E_\omega d\omega = E_\lambda d\lambda, \quad E_\omega = E_\lambda \cdot \frac{\lambda^2}{2\pi c},$$

und, da nach (39):

$$(46) \quad \lambda_n = \frac{4\pi^2 c J}{n h},$$

so wird die absorbierte Energie:

$$(47) \quad A_n = \frac{32\pi^2 N E^2 J \tau}{3 h^2} \cdot E_\lambda \cdot \frac{\psi^{n^2-n} (1 - \psi^{2n})}{\sum_0^\infty (2n+1) \cdot \psi^{n^2+n}}.$$

Sieht man von den konstanten Faktoren ab, so ergibt sich als ein Maß für die Stärke der Absorptionslinie bei $\lambda = \lambda_n$ die Zahl

$$(48) \quad \alpha_n = \frac{\psi^{n^2-n} (1 - \psi^{2n})}{\sum_0^\infty (2n+1) \cdot \psi^{n^2+n}}.$$

1) l. c. p. 415, § 7.

Dieser Ausdruck verschwindet für $n = 0$ und $n = \infty$, d. h. die längsten wie auch die kürzesten Wellen des Spektrums werden nicht absorbiert; dazwischen besitzt er also ein Maximum. Nehmen wir an, daß ψ nahe gleich 1 ist, was bei hinreichend hohen Temperaturen stets der Fall sein wird, so läßt sich die Lage des Maximums dadurch finden, daß man den Zähler von (48) — denn dieser allein hängt von n ab — nach n differentiirt und den Differentialkoeffizienten gleich Null setzt. Dies ergibt für die Lage der maximalen Absorption:

$$\psi^{2n} = \frac{2n-1}{2n+1},$$

oder, mit Berücksichtigung von (44) und Bildung des Logarithmus auf beiden Seiten, in erster Annäherung:

$$n_{\max.} = \frac{2\pi}{h} \sqrt{JkT}.$$

Daher nach (46):

$$(49) \quad \lambda_{\max.} = 2\pi c \sqrt{\frac{J}{kT}}.$$

Das ist die Wellenlänge maximaler Absorption.

Aber auch in bezug auf die Temperatur besitzt die Stärke der Absorption für irgendeine bestimmte Absorptionslinie λ_n ein Maximum, da (48) sowohl für $T = 0$ ($\psi = 0$) als auch für $T = \infty$ ($\psi = 1$) verschwindet. Dies erklärt sich natürlich daraus, daß im ersten Falle die Rotationsgeschwindigkeiten aller Dipole zu klein, im zweiten Falle zu groß sind, um die Strahlen der Wellenlänge λ_n merklich zu absorbieren. Bei der Berechnung der Temperatur maximaler Absorption berücksichtigen wir wiederum nur den Fall, daß ψ nahe gleich 1 ist. Dann ist angenähert:

$$\sum_0^{\infty} (2n+1) \psi^{n^2+n} = \int_0^{\infty} dn \cdot 2(n+\frac{1}{2}) \cdot \psi^{(n+\frac{1}{2})^2} \cdot \psi^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\ln \psi},$$

$$\text{also } \alpha_n = (\psi^{n^2+n} - \psi^{n^2-n}) \ln \psi$$

und es folgt für das Maximum von α_n , mittels Differentiation nach ψ , bei konstantem n :

$$\psi^{2n} = 1 - \frac{2n}{\frac{1}{\ln \psi} + n^2 + n},$$

oder, durch Bildung des Logarithmus, in erster Annäherung:

$$2n \ln \psi = - \frac{2n}{\frac{1}{\ln \psi} + n^2 + n}.$$

Hieraus:

$$\ln \psi = - \frac{2}{n^2 + n},$$

und, bei Vernachlässigung von n gegen n^2 , nach (44) und (46):

$$(50) \quad T_{\max.} = \frac{n^2 c^3 J}{k \lambda_n^3}.$$

§ 9.

Um die Bedeutung dieser Resultate besser übersehen zu können, wollen wir jetzt auf die numerischen Verhältnisse beim Rotationsspektrum des Wasserdampfes etwas eingehen. Zwar sind die H_2O -Molekeln sicherlich nicht als einfache Dipole zu betrachten, d. h. als Rotationskörper, deren Trägheitsmoment in bezug auf die Symmetrieachse verschwindend klein ist gegen das Trägheitsmoment zu einer darauf senkrechten Achse; aber da es sich hier nur um eine vorläufige Orientierung handelt, so wird ein solcher tastender Vorstoß auf bisher noch unbetretenem Gebiete gewiß nicht als ganz unzulässig erachtet werden.

Nach Rubens und Hettner¹⁾ entspricht der Ordnungszahl $n = 12$ der Bjerrumschen Serie die Absorptionslinie $\lambda_n = 14,3 \mu$, also nach (46) das Trägheitsmoment

$$J = 9,4 \cdot 10^{-41} [\text{g cm}^2],$$

dessen Wert in das auch anderweitig bekannte Gebiet der Größenordnung für molekulare Trägheitsmomente fällt.

Dieser Wert von J , in Verbindung mit der Temperatur des Wasserdampfes $T = 398$ liefert nach (44)

$$\psi = 0,90,$$

also immerhin der Einheit so nahe, daß eine Benutzung der obigen Formeln wenigstens für eine erste grobe Annäherung unbedenklich erscheint.

Dann liefert die Beziehung (49) für die Wellenlänge der stärksten Absorption:

$$\lambda_{\max.} = 0,008 \text{ cm} = 80 \mu,$$

1) H. Rubens u. G. Hettner, Berl. Ber. 1916. p. 179.

welche der Absorptionslinie mit der Ordnungszahl $n = 2$ der Bjerrumschen Serie entsprechen würde.

Ein Vergleich mit der Fig. 1 der Arbeit von Rubens und Hettner zeigt in Übereinstimmung hiermit ein starkes Anwachsen der Stärke der Absorption mit steigender Wellenlänge, d. h. mit abnehmender Ordnungszahl n .

Was ferner die Temperatur betrifft, bei welcher eine bestimmte Linie, etwa die oben betrachtete: $n = 12$, $\lambda_n = 14,8 \mu$, ihre stärkste Absorption zeigt, so ergibt sich diese aus der Gleichung (50) zu:

$$T_{\max.} = 3100,$$

also ungefähr 2800°C . Es ist daher für die betrachtete Linie von der Beobachtungstemperatur 125°C ab noch ein starkes Anwachsen der Absorption mit steigender Temperatur zu erwarten. Für die Absorptionslinien größerer Wellenlängen liegt dagegen die Temperatur der Maximalabsorption erheblich tiefer, da nach (50) dieselbe dem Quadrat der Wellenlänge umgekehrt proportional ist; so z. B. ergibt sich für die Linie $n = 5$, $\lambda_n = 33,3 \mu$:

$$T_{\max.} = 580,$$

also ungefähr 300°C . Beim Erhitzen des Wasserdampfes über 300° hinaus müßte also die Stärke der Absorption dieser Linie wieder abnehmen.

§ 10.

Schließlich möge an die hier erhaltenen Resultate noch eine Betrachtung geknüpft werden, die zu einer Ableitung des Gesetzes der normalen Energieverteilung im Spektrum der schwarzen Strahlung führt und dadurch zugleich eine Prüfung der ganzen Theorie ermöglicht.

Wenn die rotierenden Dipole lediglich der ihrer Temperatur entsprechenden schwarzen Strahlung ausgesetzt sind, so ist der ganze Vorgang im statistischen Sinne *stationär*, sofern man außer der Einstrahlung auch die Ausstrahlung (Emission der Dipole) berücksichtigt. Nun habe ich vor kurzem bei anderer Gelegenheit¹⁾ die für den statistisch-stationären Zustand gültigen Gesetze vom Standpunkte der Quantentheorie aus untersucht, und dabei für den Sprung der Verteilungsdichte $W(\omega)$ an der Grenze zweier Elementargebiete

1) M. Planck, Berl. Ber. p. 336. Gl. (26). 1917.

eine allgemeine Formel abgeleitet, welche in den hier gebrauchten Bezeichnungen folgendermaßen lautet:

$$(51) \quad \frac{1}{2} (\Delta \omega_n)^2 (W_{n-1}(\omega_n) - W_n(\omega_n)) = \tau f(\omega_n) \cdot W_n(\omega_n) \cdot \frac{d\omega_n}{dn}.$$

Dabei bedeutet noch $f(\omega) \cdot \tau$ die gemäß der klassischen Theorie in der Zeit τ durch Emission bewirkte Abnahme der Winkelgeschwindigkeit ω eines rotierenden Dipols:

$$(52) \quad f(\omega) \cdot \tau = \frac{2 E^2 \omega^3}{3 c^3 J} \cdot \tau,$$

entsprechend der ausgestrahlten Energie:

$$(53) \quad \Delta \left(\frac{1}{2} J \omega^2 \right) = \frac{2 E^2 \omega^4}{3 c^3} \cdot \tau.$$

Setzt man nun in diese Bedingungsgleichung für $(\Delta \omega_n)^2$ den Ausdruck (38), für $W_n(\omega_n)$ bzw. $W_{n-1}(\omega_n)$ den Ausdruck (43), und für $d\omega_n/dn$ nach (39) den Ausdruck $h/2\pi J$, so ergibt sich die spezifische Intensität der schwarzen Strahlung:

$$(54) \quad \mathfrak{R}_{\omega_n} = \frac{4 h \omega_n^3}{3 \pi^2 c^3 \beta (\psi^{-2n} - 1)}.$$

Hier ist nach (44) und (39):

$$(55) \quad \psi^{-2n} = e^{\frac{h \omega_n}{2 \pi k T}}.$$

Der oben durch (31) definierte Zahlenfaktor β endlich ergibt sich am direktesten aus der Formel (157), Seite 106, meiner Vorlesungen über Wärmestrahlung, die so lautet:

$$\overline{C_n^2} = \frac{64 \pi^2}{3 c^2} \mathfrak{R}_\nu.$$

Setzt man hier

$$\frac{1}{\mathfrak{R}} = \frac{\Delta n}{\Delta \nu} = d\nu,$$

so kommt:

$$\overline{C_n^2} = \frac{64 \pi^2}{3 c^2} \mathfrak{R}_\nu d\nu = \frac{64 \pi^2}{3 c^2} \mathfrak{R}_\omega d\omega,$$

und durch Vergleich mit (31):

$$(56) \quad \beta = \frac{64 \pi^2}{3 c^2}.$$

Damit wird die Gleichung (54) für die spezifische Intensität der schwarzen Strahlung:

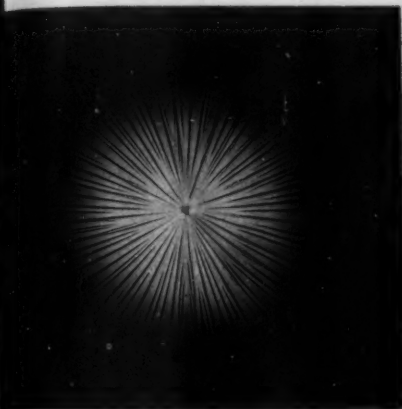
$$(57) \quad R_{\omega} = \frac{h \omega^3}{16\pi^3 c^2} \frac{1}{e^{\frac{h \omega}{2\pi k T}} - 1},$$

wie bekannt.

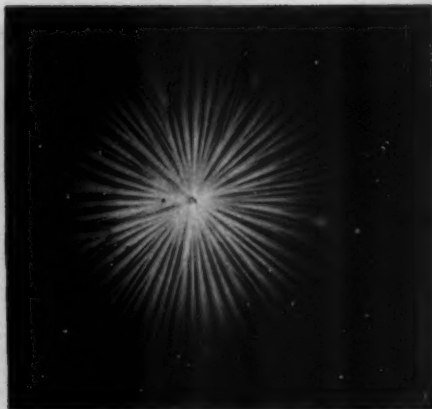
In der Kette der Schlußfolgerungen, welche dieser Ableitung der Strahlungsformel zugrunde liegen, ist das schwächste Glied jedenfalls die Grenzbedingung (51); doch muß bemerkt werden, daß, falls diese Bedingung sich als unzutreffend herausstellen sollte, dann jedenfalls noch mindestens eine der übrigen hier benutzten Beziehungen, wahrscheinlich sogar die ganze Theorie der Absorption, fallen gelassen werden müßte, weil ja sonst ein falsches Strahlungsgesetz resultieren würde. Die Möglichkeit eines solchen Befundes ist allerdings bei dem jetzigen Stande unserer Kenntnisse durchaus nicht von der Hand zu weisen; derselbe wäre aber dann doch wohl von ähnlicher Bedeutung wie etwa der für die ganze Quantentheorie so wichtige Nachweis, daß die unbeschränkte Beibehaltung der klassischen Theorie mit Notwendigkeit zum Rayleighschen Strahlungsgesetz führt.

(Eingegangen 17. Juli 1917.)

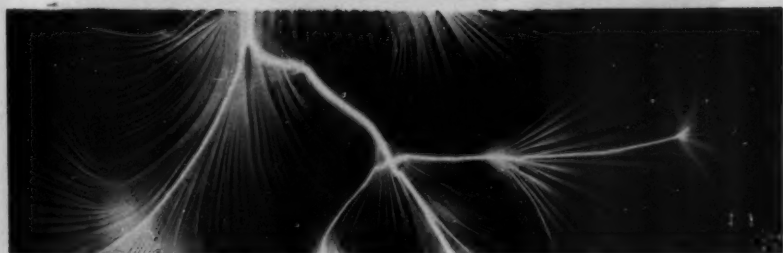
1



2



3



Max. Toepler.



1891



Max. Toepler.

1111
1112
1113
1114
1115

